Universidade de Aveiro Departamento de Educação

2014

Micaela Sofia Martins Terceiro

O processo de melhoria do questionamento de um professor estagiário

Universidade de Aveiro Departamento de Educação

2014

Micaela Sofia Martins Terceiro

O processo de melhoria do questionamento de um professor estagiário

Relatório de Estágio apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, realizado sob a orientação científica da Doutora Teresa Neto, Professora Auxiliar do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro.

À minha mãe…

o júri

presidente

Professora Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pereira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Professora Doutora Maria Helena Gouveia Fernandes Teixeira Pedrosa de Jesus
Professora Associada C/ Agregação Aposentada da Universidade de Aveiro

Prof. Doutora Maria Teresa Bixirão Neto
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

À minha orientadora, a Professora Teresa Neto, por todo o apoio, orientação, ajuda, conselhos e, sobretudo, por toda a disponibilidade prestada.

À Professora Isabel Órfão, pelos ensinamentos que me proporcionou ao nível pedagógico, didático e pessoal.

À Professora Nilza Costa e à Ana, por terem contribuído de forma tão significativa no desenvolvimento deste estudo.

À minha mãe, a quem dedico este trabalho, por me ter proporcionado a realização de um dos meus sonhos.

Ao João, pelas palavras de incentivo, de apoio e de força.

À Diana, à Carolina, à Tânia, à Brenda e a todos os restantes amigos e elementos da família, pela compreensão da minha ausência em muitos momentos.

palavras-chave

Questionamento, pergunta do professor, dificuldades na formulação de perguntas, Matemática no Ensino Básico

Resumo

O presente relatório é parte integrante da unidade curricular Prática de Ensino Supervisionada pertencente ao 2.º ano do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário ministrado na Universidade de Aveiro.

Decorrente do primeiro semestre do referido ano, podemos identificar como dificuldade dominante, o questionamento e a formulação de perguntas adequadas não só aos níveis de ensino propostos, como também segundo o nível cognitivo exigido para determinado momento. Deste modo, as principais finalidades deste trabalho foram compreender quais as minhas principais dificuldades ao formular perguntas e consequentemente aperfeiçoar a minha prática docente a este nível.

Posto isto, o estudo incidiu sobre o questionamento praticado nas aulas dadas a uma determinada turma do 9.º ano de escolaridade, recolhendo-se dados através de notas de campo, registos áudio e vídeo bem como a realização de um questionário aos alunos.

Da análise dos resultados obtidos, pode-se concluir que houve uma melhoria no questionamento ao longo do tempo, sendo o nível cognitivo das perguntas formuladas em contexto de aula coincidente com o nível cognitivo das perguntas planificadas previamente. Concluiu-se ainda que os objetivos planificados para cada aula nem sempre são passíveis de concretização, sendo elementos influenciadores as perguntas colocadas e a planificação elaborada. De forma geral, também é possível concluir que os alunos consideram que o questionamento praticado contribuiu para o seu desenvolvimento, aprendizagem e desempenho escolar.

keywords

Questioning, teachers' questions, difficulty in the formulation of the questions, Maths on the Basic Education

Abstract

This report is part of the curricular unit Supervised Teaching Practice that belongs to the 2nd year of the master degree in Teaching Mathematics on the 3rd cycle of basic and secondary education from the University of Aveiro.

As a result of the first semester of the referred year, we can identify as the main difficulty the questioning and the formulation of the adequate questions, not only at the proposed levels of teaching, but also according to the level of knowledge required for a precise moment. So, the main objectives of this work were to understand my main difficulties in formulating questions and hence improve my teaching abilities at this level.

Therefore, the study focused the questions praticed in lessons given to a particular class of a 9th grade, collecting data through the field notes, audio and video recordings as well as the completion of a questionnaire by the students directly.

From the analysis to the results, we can conclude that there was improvement overtime in the questioning, being the cognitive level of the questions in the classroom coherent with the cognitive level of the previously planned questions. We also conclude that the planned objectives for each class aren't always possible to substantiate, and the questions and the planning are elements that determine that.

In general, we can also say that the students think that the way questions are posed affects their development, their learning process and their school process.

Índice Geral

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Abreviaturas

AQE: Avaliação e Qualidade em Educação

CEB: Ciclo do Ensino Básico

C-M: Perguntas de Conhecimento-Memória (segundo a categorização adotada)

GAVE: Gabinete de Avaliação Educacional

PA: perguntas de Pensamento Avaliativo (segundo a categorização adotada)

PC: Perguntas de Pensamento Convergente (segundo a categorização adotada)

PD: Perguntas de Pensamento Divergente (segundo a categorização adotada)

PES: Prática de Ensino Supervisionada

R: Perguntas de Rotina (segundo a categorização adotada)

Rh: Perguntas de Retórica (segundo a categorização adotada)

TI: Teste Intermédio

u.c.: unidade curricular

Introdução

O presente capítulo explicita os incentivos ao estudo e a sua importância num contexto de sala de aula da disciplina de Matemática. É apresentado ainda a problemática, as finalidades do estudo e as questões às quais pretendo encontrar uma resposta e que, por si só, orientam o estudo. A última parte do capítulo é dedicada à explicitação sumária da organização do presente Relatório de Estágio.

Motivação e pertinência

Nos tempos que decorrem, a profissão de professor é cada vez mais um desafio. Na minha opinião, um desafio que envolve não só aspetos intrínsecos ao próprio processo de ensino e aprendizagem, como também aspetos relacionados com a envolvente espácio-temporal. Sardo (2010) afirma ainda que "É importante ter consciência de que a atividade de ser professor está, cada vez mais, associada a situações inesperadas, imprevisíveis e complexas às quais tem que conseguir reagir rápida e eficazmente." (p. 32). Embora o professor planifique e prepare as suas intervenções de forma minuciosa, é natural que o desenvolvimento da aula assuma direções não planeadas.

Enquanto professora estagiária e portanto com pouca experiência, tomei consciência, a cada dia, das dificuldades inerentes ao processo de ensino e aprendizagem. Nem sempre as planificações eram exequíveis e, quando pareciam adequadas, senti a necessidade de estabelecer planos substitutos para, posteriormente em contexto de sala de aula, não estar desprevenida.

Durante o meu percurso académico, principalmente durante a Prática de Ensino Supervisionada, que realizei no 2.º ano do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário, constatei que a minha maior dificuldade se prendia com a formulação correta de perguntas. Na verdade, e segundo Ponte et al. (2007a), "Não é fácil aprender a formular boas questões" e "é necessário ser capaz de integrar tais questões no fluxo natural da comunicação na sala de aula." (p. 55).

Em contexto de sala de aula, a forma como o professor coloca o seu discurso é das tarefas mais complexas. Há que ter em conta que, segundo Domingues e Martinho (2012), "A comunicação presente numa aula de matemática tem um papel fundamental o desenvolvimento do raciocínio." (p. 322), sendo por isso necessário que o professor tenha a consciência dos efeitos que advêm da comunicação que fomenta em sala de aula. Para além disso, numa aula "o professor assume com mais frequência o papel de enunciador enquanto os alunos desempenham sobretudo o papel de recetores" (Menezes, 1996, p. 6), facto que se traduz, segundo Ferreira (2010), em cerca de 68% do tempo de aula que é dedicado ao discurso do professor. Fica assim fundamentada a importância que o discurso do professor assume em contexto de sala de aula.

Tendo em conta diversas investigações realizadas na área, (Almeida, 2007; Barros, 2008; Chin, 2006; Ferreira, 2010; Martinho & Ponte, 2000; Menezes, 1996; Neri de Souza, 2006; Pedrosa de Jesus, 1987; Ponte et al., 2007a; Wellington, 2000), constata-se que o discurso que o professor pratica em sala de aula é essencialmente estruturado sobre a forma de perguntas. Assim, é imprescindível que o professor seja não só um bom comunicador como também saiba formular perguntas, de modo a que estas se tornem numa ferramenta profícua na prática docente. Para além do questionamento ser um instrumento frequentemente utilizado pelo professor, a importância deste também se deve ao facto de que perguntas bem formuladas e com níveis cognitivos adequados podem, e devem, segundo Almeida (2007), "estimular no aluno um nível de pensamento elevado." (p. 25).

Em suma, com base em diversas investigações, pode-se concluir que as perguntas colocadas pelo professor em contexto de sala de aula devem ser consideradas um elemento importante no processo de ensino-aprendizagem, sendo portanto fulcral que o próprio professor saiba quando e como praticar o questionamento de forma proveitosa. É fundamental que o professor consiga atingir os objetivos que delineou para cada aula (ou conjunto de aulas) através de um questionamento adequado ao ambiente em que se insere.

Nesta linha orientadora, decidi, durante o meu estágio no âmbito da PES, realizar um estudo incidente nesta área no sentido de compreender quais as minhas principais dificuldades ao utilizar o questionamento em contexto de sala de aula e assim contribuir para a criação de estratégias que me possibilitem ultrapassar as dificuldades sentidas aquando da colocação de perguntas.

De forma a planificar as aulas com especial atenção na criação de um questionamento potenciador de um ambiente de aprendizagem ativa, tive em consideração investigações realizadas na área, focalizando-me nos trabalhos inseridos nas Ciências Exatas, e recorrendo ao Programa de Matemática do Ensino Básico. Claramente não descuidei a planificação anual elaborada pelo grupo de Matemática da escola onde realizei as unidades curriculares de Prática de Ensino Supervisionada I e II nem a planificação da professora responsável das turmas onde intervim (orientadora cooperante da Prática de Ensino Supervisionada I e II), assim como as suas indicações mais detalhadas.

Problemática e questões de investigação

Depois de tomar conhecimento da importância que o questionamento praticado pelo professor em sala de aula assume para o processo de ensino-aprendizagem e de identificar as dificuldades que senti, aquando da realização da Prática de Ensino Supervisionada, ao formular corretamente perguntas e ecologicamente enquadradas no contexto em que estava inserida, surgiu a minha problemática:

As minhas principais dificuldades inerentes ao processo do questionamento que pratico em sala de aula, nomeadamente no que diz respeito à formulação de perguntas e questões que orientem a aula de forma a cumprir os objetivos propostos.

Deste modo, as principais finalidades deste trabalho são: identificar quais as minhas principais dificuldades ao formular perguntas e aperfeiçoar, do ponto de vista pessoal, a minha prática docente a este nível.

Para atingir as finalidades supracitadas, surgiram as seguintes questões, às quais me proponho encontrar uma resposta:

- Quais as minhas principais dificuldades ao formular perguntas?
- Os objetivos planificados para cada aula coincidem com os objetivos alcançados nessa mesma aula?
- Qual o entendimento dos alunos acerca do questionamento praticado por mim para o desenvolvimento das suas aprendizagens?

De forma a atingir as finalidades propostas e responder às questões enunciadas, foram definidos os seguintes objetivos:

- Identificar as principais dificuldades sentidas ao formular perguntas em contexto de sala de aula;
- Identificar as principais falhas ao formular perguntas e questões em contexto de sala de aula;

- Estabelecer uma comparação entre os objetivos contemplados nas planificações delineadas e os objetivos alcançados em cada aula;
- Caracterizar a opinião dos alunos relativamente ao questionamento praticado pelo professor.

Pretendo assim, com este trabalho, contribuir para o meu desenvolvimento pessoal e profissional na área do Questionamento, e espero ainda construir ferramentas, de forma a aprimorar as minhas práticas docentes, com vista à melhoria do processo de ensino e aprendizagem que desenvolverei.

Organização do estudo

O presente estudo está estruturado segundo cinco capítulos. No primeiro, apresento a motivação e pertinência, assim como a problemática que deu azos ao próprio estudo, acompanhada das questões de investigação. O segundo capítulo diz respeito ao enquadramento teórico da temática, onde é contemplada uma revisão de literatura acerca do questionamento em geral e são apontados os indicadores de idoneidade didática num processo de ensino e aprendizagem da Matemática. O terceiro capítulo é composto pelas opções metodológicas, caracterização dos participantes, fases do estudo e procedimentos utilizados na recolha e análise dos dados. O quarto capítulo é dedicado à apresentação e análise dos dados recolhidos. No último capítulo, é feita uma conclusão sintética dos resultados obtidos, respondendo às questões que orientaram o estudo, complementada com uma reflexão pessoal sobre a realização deste trabalho.

Capítulo 1 - Fundamentação Teórica

O presente capítulo subdivide-se em duas partes distintas. A primeira parte diz respeito à revisão de literatura que foi realizada no sentido de explicitar os conceitos utilizados ao longo do estudo, assim como aprofundar o tema do questionamento, nomeadamente no que diz respeito à pergunta do professor e os assuntos que lhe são inerentes. A segunda parte apresenta os indicadores de idoneidade didática apresentados por Godino.

1.1. O questionamento

The best teachers are often the best questioners.
(Wellington, 2000)

No sentido de aprofundar a temática do questionamento, realizou-se uma revisão de literatura que se apresenta de seguida. As leituras feitas permitiram-me tomar contacto com as metodologias usualmente utilizadas neste tipo de estudos associados à temática do questionamento, sendo uma ajuda imprescindível para as escolhas metodológicas e a construção dos instrumentos de observação que se tornariam o corpus de dados do presente estudo.

Importa ainda referir que as leituras realizadas basearam-se essencialmente em dissertações (de mestrado), teses (de doutoramento) e artigos publicados sobre a temática do questionamento, sendo o foco central da leitura a pergunta do professor.

1.1.1. A comunicação em sala de aula

A comunicação é inata ao ser humano. Desde que se conhece, o Homem expressa-se das mais variadíssimas formas, seja verbal ou não verbal. Etimologicamente, a palavra *comunicação* é uma derivação do latim COMMUNICATIO que, por sua vez, significa “estar em contacto com”, “pôr em comum”. (Durozoi & Roussel, 1997, p. 80). Contudo, os diversos contextos onde a comunicação surge, contextos esses mais ou menos formais, não são alimentados pelas mesmas formas de discurso e postura.

Sendo que comunicação designa, de forma geral, “qualquer processo de troca de uma mensagem entre um emissor e um recetor” (Durozoi & Roussel, 1997, p. 80), esta não poderia ser excluída do processo de ensino/aprendizagem, uma vez que uma das componentes da aprendizagem é, efetivamente, a interação entre os indivíduos. Menezes (1996), baseando-se em Stubbs (1987), afirma que “o diálogo na sala de aula, entre professor e alunos é, em grande parte, o próprio processo educacional.” (p. 1). Os indivíduos interagem entre si essencialmente comunicando. Quer de forma verbal ou não verbal, a forma como um indivíduo comunica com os outros revela imenso não só acerca de si, como também acerca do que sente ou deseja naquele momento.

Etimologicamente designando “pôr em comum” (Durozoi & Roussel, 1997), o conceito de *comunicação* não parece ser assim tão simples de definir. Segundo Medeiros (2000) é mesmo uma “tarefa que não se apresenta fácil e unânime” uma vez que “é um conceito vasto e complexo” e de facto existe “alguma subjetividade na definição do que é a comunicação” (p. 32). Para se estabelecer uma definição apropriada, há que ter em conta não apenas o contexto em que está inserida como também a envolvente a ser estudada ou analisada. De qualquer forma, “é essencial a existência de uma linguagem, pois sem esta não poderia haver, entre pelo menos dois sujeitos falantes a possibilidade de *tornar em comum*” (Medeiros, 2000, p. 32), tal como nos sugere a etimologia da palavra *comunicação*.

Um dos maiores condicionadores que afetam a eficácia da comunicação diz respeito à descodificação da mensagem. Quando o emissor transmite uma ideia, tem uma bagagem cultural, educacional, entre outras, distinta do recetor da mensagem. Cada indivíduo passa por diferentes experiências e constrói conhecimentos diferentes, ou por vias diferentes, alterando assim as suas conceções. Deste modo, o que será para um indivíduo poderá tomar outros contornos para um outro indivíduo. Tendo em conta Ferreira (2010) o recetor, tal como o emissor, “é um sujeito ativo, com representações e conhecimentos subjacentes do mundo, e, por isso, (re)constrói o sentido da mensagem” (p. 58).

Com isto, será tida como definição geral de *comunicação* todo o “processo pelo qual um emissor se relaciona com um recetor através de uma mensagem transmitida em código, por um canal” (Santos citado por Medeiros 2000, p. 32).

Em contexto de sala de aula, a definição acima é um pouco ampla, não englobando especificamente pormenores que fazem a diferença, denominados por *ruídos*. Medeiros

(2000) salienta alguns destes ruídos e que exemplificam a ideia: “uma imagem defeituosa, uma palavra caligraficamente impercetível, uma intervenção inoportuna, falar demasiado baixo, ausência de pontuação num texto escrito, algazarra, ruido exterior, má acústica, pronúncia defeituosa, quadro mal iluminado, raios de sol nos olhos dos alunos, etc.” (p. 35).

Outra consideração a ter em conta relaciona-se com o modo como o processo de comunicação é desencadeado em sala de aula, podendo este ser eficaz ou não. A este nível vários são os fatores que influenciam a qualidade do processo. Pedrosa de Jesus (2000) considera que existem “atributos que professores e alunos desenvolvem ao longo dos respetivos percursos de vida” e, por outro lado existem igualmente “condições e fatores intrínsecos ao ambiente escolar (…) que determinam muito do que na aula acontece (…)” (p. 149). Aspetos como “o tom de voz, a capacidade de escutar, o olhar, os gestos” determinam o grau de proximidade entre os indivíduos entre os quais se estabelece a comunicação. De outro ponto de vista, também o tipo de linguagem, o contexto cultural e socioeconómico do ambiente escolar, e mesmo o ambiente familiar dos alunos, influenciam o processo de comunicação e não devem ser descuidados pelo professor. É, assim, fundamental que o professor esteja inteirado do ambiente onde ensina e das suas características mais minuciosas pois só assim conseguirá transmitir a mensagem de forma clara para todos, contornando assim as complicações adjacentes ao processo de descodificação da mensagem.

Na escola, especificamente na sala de aula, a comunicação é um processo fundamental. Se é uma ferramenta utilizada diária e constantemente na sociedade, num contexto de ensino-aprendizagem assume um papel fundamental na medida em que o professor se serve do seu discurso e da forma como o planta em sala de aula para transmitir ideias. Medeiros (2000) afirma que “ensinar é falar” (p. 32). Já Beaudichon (2001), citado por Abrantes (2005), acredita mesmo que “comunicar é transmitir e influenciar” (p. 27), reforçando assim a importância que um bom discurso desempenha na sala de aula.

Por outro lado, e considerando a aprendizagem como um processo que exige, como papel principal, a interação entre os intervenientes, cabe ao professor criar condições para que a aprendizagem seja, efetivamente, um processo de construção de conhecimentos. Fino (2001), citado por Sardo (2010), afirma mesmo que esta interação entre os indivíduos não se define “apenas pela comunicação entre o professor e o aluno, mas também pelo ambiente em que a comunicação ocorre, de modo a que o aprendiz interage também com os problemas" (p. 33).

No panorama dos alunos, a importância da comunicação é cada vez mais destacada nos documentos orientadores para a aprendizagem, nomeadamente a Comunicação Matemática que aparece em relevo no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Damião et al., 2013). Pode ler-se que "Os alunos devem ser incentivados a expor as duas ideias, a comentar as afirmações dos colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas" (p. 5). Também a expressão escrita assume uma importância acrescida, sendo uma "parte integrante da atividade matemática" e portanto "os alunos devem também ser incentivados a redigir convenientemente as suas respostas, explicando adequadamente o seu raciocínio e apresentando as suas conclusões de forma clara" (p. 5). Com isto, o professor fica com a tarefa acrescida de fomentar não só o discurso oral dos seus alunos, como também de criar momentos propícios para o desenvolvimento da comunicação escrita.

Asseverando estes fatores que evidenciam a importância da comunicação criada em sala de aula, Menezes (1996) coloca algumas questões interessantes que parecem despertar o interesse por esta temática, especificamente no domínio da disciplina de Matemática. O autor questiona-se não só acerca das implicações que a inexistência de comunicação ou o discurso monológico tem no (in)sucesso dos alunos como também acerca da própria forma de comunicar do professor, nomeadamente a linguagem que utiliza, sendo esta um elemento fundamental na ciência exata que é a Matemática.

Focalizando o monólogo que acaba por ser criado em sala de aula, sendo o professor o emissor e o aluno o recetor, deve-se considerar que o diálogo nem sempre é a melhor solução, na medida em que pode não traduzir a efetiva troca de ideias e criação de conhecimento. Um diálogo assente em perguntas "muito dirigidas e de resposta quase pré-determinada ou através de outras solicitações de intervenção" (Menezes, 1996, p. 7) por parte do professor é um diálogo pobre ao nível da qualidade do processo de ensino-aprendizagem que se estabelece. Por outro lado, e tal como afirma Menezes (1996), "uma aula em que o diálogo é generalizado aos diversos elementos da turma, onde se inclui o professor, privilegiando as atividades de discussão e o confronto de perspetivas" (p. 7) tem tudo para ser uma aula proficiente e propiciadora de um ambiente favorável à aprendizagem.

Assim, o questionamento pode e deve ser considerado um elemento estruturador da interação dentro da sala de aula, seja esta interação professor-aluno ou aluno-aluno. É da responsabilidade do professor tomar consciência da importância que a comunicação, e o próprio questionamento, assumem em sala de aula. Deve, por isso, encontrar estratégias e ferramentas que proliferem as vantagens de todo o processo de comunicação, de forma a criar momentos de aprendizagem ativa, que exija interação de parte a parte, fugindo assim do discurso monopolizador do professor.

1.1.2. O conceito de questionamento

Antes de prosseguir, urge a necessidade de clarificar alguns conceitos utilizados ao longo deste trabalho.

Comummente, os termos *pergunta* e *questão* são empregues de forma aleatória, sem que se tenha consciência da diferença existente nas suas definições. Segundo o Dicionário Priberam da Língua Portuguesa (Priberam Informática S.A., 2013), o termo *pergunta* surge associado ao "acto ou efeito de perguntar". Por sua vez, *questão* define-se como sendo um "ponto que deve ser discutido ou examinado". Isto é, a *questão* é mais do que uma *pergunta* no sentido em que inclui reflexão quer na sua elaboração, quer na sua resposta.

Neri de Souza (2006) assevera esta distinção entre os termos *pergunta* e *questão*, dando o exemplo do jornalista português Fernando Pessa[1]. Este afirmava que "se lhe fizessem uma pergunta ele lhe daria imediatamente uma resposta, mas se lhe formulassem uma questão ele não responderia apressadamente já que uma questão exige reflexão." (p. 87).

Porém, a definição de *pergunta* não é assim tão simples, sendo um assunto estudado por diversos linguistas, psicólogos, antropólogos e filósofos (Almeida, 2007). Considera-se até necessário fazer uma distinção entre *pergunta* e *expressão interrogativa*. As ditas *expressões interrogativas* "devem terminar sintaticamente com um ponto de interrogação

[1] Fernando Pessa (1902-2002)

quando escritas. (…), pelo contrário, uma pergunta [se] define-se conceptualmente e não sintaticamente." (p. 22).

Na verdade, as perguntas podem assumir várias formas sintáticas, sendo que nem sempre terminam com o sinal de pontuação de interrogação. Os linguistas afirmam existirem três tipos de proposições (afirmativas, imperativas e interrogativas) as quais "se distinguem pelas especificações de sintaxe e de gramática" e "[Segundo Kerbrant-Orecchioni (1991)] correspondem às três principais funções pragmáticas do discurso, que todas as línguas oferecem aos seus utilizadores" (Neri de Souza, 2006, p. 88). Se for assumido o modo interrogativo, de facto a pergunta termina com um ponto de interrogação (Exemplo: *O que é uma circunferência?*). No entanto, tomando o modo imperativo (Exemplo: *Diz-me o que é um número natural.*) ou o modo declarativo (Exemplo: *Eu não percebi o que é uma função.*) é exigido de igual forma uma resposta, apesar da frase não adotar a forma interrogativa.

Em suma, "as perguntas podem ser expressões interrogativas, mas não o são sempre." (Neri de Souza, 2006, p. 88). Por outro lado, e segundo Ferreira (2010), "podemos ter perguntas que são questões e outras que não o são" (p. 63) permitindo assim concluir que "o termo mais genérico para o ato de questionar é *pergunta*" (Ferreira, 2010, p. 63).

Este estudo procura identificar as principais dificuldades dos professores quando colocam uma pergunta ou uma questão. Neste sentido, e tendo em conta que nos estamos a referir a elementos geradores de interação, ao longo deste trabalho, o termo *pergunta* significará qualquer frase, declarativa ou interrogativa, que exige uma resposta por parte do recetor, seja esta resposta dada sob forma verbal ou não verbal (Almeida, 2007; Ferreira, 2010). Relativamente ao termo *questionamento*, este será tido como todo o "ato de interrogar e responder, as suas características e o contexto em que decorre" (Ferreira, 2010, p. 63). Por sua vez, quando for referido o termo tempo de espera deverá ser considerado "o silêncio que se segue à pergunta do professor" (Almeida, 2007, p. 30).

1.1.3. A importância do questionamento em contexto de sala de aula

Tal como afirma Medeiros (2000), "o recurso a aulas expositivas dificilmente consegue fazer com que os alunos atinjam os objetivos previstos para o ensino", o que faz com que “as aulas que privilegiam a interação tendem a ser valorizadas, porque a interação pode ser entendida como o processo que permite construir o discurso de forma colaborativa” (p. 36). Assim, é natural que os professores se auxiliem da pergunta para fomentar a interação em sala de aula, fazendo com que esta assuma um papel importantíssimo no contexto a que nos referimos.

O questionamento praticado em sala de aula tem sido uma temática de preocupação constante para diversos investigadores nos últimos anos. Que se tenha conhecimento, o primeiro estudo feito sobre o questionamento em sala de aula data de 1912 e pertence à autora Romiett Stevens. A investigação que realizou permitiu-lhe concluir que cerca de 80% do tempo de aula é ocupada com as perguntas dos professores e respetivas respostas e reações (Neri de Souza, 2006). Assim, sendo que a maior parte do tempo de aula é dedicado ao questionamento, urge a necessidade de estudar mais sobre a temática de forma a compreender a sua envolvente e, claro, tendo sempre como finalidade o processo de ensino-aprendizagem. Barros (2008) afirma mesmo que

> “Assim, a formulação de perguntas constitui-se como um processo essencial ao desenvolvimento do raciocínio crítico e do pensamento criativo, sendo que a sua utilização pelos professores e alunos, no contexto de sala de aula, é um instrumento fundamental no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem.” (p. 59)

Por outro lado, Pedrosa de Jesus, Sá Correia e Abrantes (2005) também afirmam que tamanho interesse pelas perguntas colocadas pelo professor em sala de aula se deve ao facto de que “o modo como elas são colocadas pode contribuir para desenvolver os processos cognitivos dos respondentes” (p. 5). As autoras acreditam que a utilização de perguntas por parte do professor pode ser considerada um instrumento fundamental para o desenvolvimento de cidadãos autónomos, responsáveis e com pensamento crítico, tal como a sociedade exige atualmente. Neri de Souza (2006) coloca a questão num domínio diferente considerando que “qualquer currículo deveria estar centrado em torno das perguntas” (p. 94). As opiniões acima citadas vão ao encontro da mesma linha de pensamento: a preocupação com as perguntas que os professores colocam deve-se à influência que estas têm no processo de ensino-aprendizagem, dependendo da forma como são colocadas.

Vejamos um exemplo prático, exemplo esse que Wellington (2000, p. 88) apresenta na sua obra:

Pergunta nº1: Qual é a bebida que arrefece mais rapidamente?

Pergunta nº2: Como é que descobriste qual é a bebida que arrefece mais rapidamente?

Através deste exemplo é percetível que a forma como a pergunta é colocada exige diferentes respostas por parte dos alunos e, consequentemente, diferentes estruturações de respostas, influenciadas por diferentes formas de pensar. Enquanto que a primeira pergunta apenas pede uma resposta fechada, bastando uma palavra, a segunda pergunta exige que o aluno explique, através da sua experiência e das conclusões que lhe foi possível retirar, a conclusão a que chegou. Deste modo, o aluno vê-se na obrigação de estruturar o pensamento e fazer as ligações necessárias não apenas para explicar os seus procedimentos e as conclusões a que chegou, como também para compreender a viabilidade e fiabilidade da sua resposta.

Considera-se, portanto, que o questionamento para além de ser uma forma de desafiar ideias e conceções, permite avaliar o nível de compreensão dos alunos em relação a determinados conteúdos e assume o papel principal na promoção da aprendizagem.

1.1.4. A pergunta do professor

Apesar do começo das investigações relacionadas com o questionamento remeter para o início do século XX, é apenas em meados desse mesmo século, mais especificamente na década de sessenta, que a questão relacionada com as implicações que a pergunta do professor tem no aluno começa a ser estudada, mais precisamente por Hunkins. Este autor, na sua investigação que data de 1968, procurou "determinar se o uso de perguntas […] estimula efetivamente o desenvolvimento das capacidades dos alunos" (Neri de Souza, 2006, p. 102).

Segundo Barros (2008), as perguntas são um "instrumento indispensável para que o professor envolva ativamente os educandos na sua própria aprendizagem" (p. 74). Na mesma linha de pensamento, Almeida (2010) afirma que "questions play a central role in the processes of teaching and learning because students' learning, thinking, participation and their level of engagement depend on the kind of the questions teachers formulate and use in the classroom" (p. 751). Acredita-se, portanto, que o professor pode, através da formulação de perguntas, estimular o pensamento dos alunos, desenvolver as capacidades de raciocínio e, desta forma, promover a aprendizagem. Deste modo, torna-se fulcral que o professor domine as competências necessárias para a criação de um questionamento proficiente em sala de aula, uma vez que é ele que "decide o tipo de perguntas, o formato, a sequência, quem pode participar e durante quanto tempo" (Almeida, 2007, p. 24).

No entanto, os professores tendem a formular perguntas que apenas apelam à memória, isto é, perguntas de baixo nível cognitivo, não favorecendo o ambiente propício à aprendizagem (Pedrosa de Jesus, 1987). Segundo Medeiros (2000), "Existem estudos que indicam que apenas 5% das perguntas são abertas, o que implica que o estímulo a um tipo de raciocínio mais elevado é raro" (p. 42).

Apesar de ser banal num contexto de aula, formular uma pergunta não é das tarefas mais fáceis. De facto, segundo Ponte et al. (2007a) "(…) a colocação de questões aos alunos é uma forma privilegiada do professor exercer o seu papel regulador da comunicação na sala de aula" porém "(…) é necessário ser capaz de integrar tais questões no fluxo natural da comunicação na sala de aula" (p. 55). Wellington et al. (1996), referidos por Medeiros (2000), consideram que

> "as perguntas a colocar em sala de aula, devem ser previamente preparadas e de acordo com algumas regras. (…) existem três aspetos que devem ser tidos em consideração: a elaboração da pergunta, a apresentação das perguntas e o modo como nos posicionamos perante as respostas." (pp. 42-43)

Cabe assim ao professor a formulação de perguntas adequadas ao contexto em que se encontra, ao tipo de aula que orienta e com níveis cognitivos apropriados, de forma a conseguir retirar o maior proveito do questionamento que cria em sala de aula. O professor deve sempre ter em conta que o tipo de perguntas que coloca e a forma como as coloca influência todo o processo de ensino-aprendizagem, com especial ênfase o raciocínio e o pensamento crítico dos alunos.

A frequência de perguntas em sala de aula

Como já mencionado anteriormente, e com base em diversos estudos já realizados (Chin, 2006; Coutinho, 2012; Ferreira, 2010; Neri de Souza & Moreira, 2010; Neri de Souza, 2006; Pedrosa de Jesus, 1987; Pedrosa de Jesus, Sá Correia e Abrantes, 2005), são os professores que monopolizam o discurso dentro da sala de aula. O primeiro estudo empírico feito acerca desta temática, realizado por Stevens em 1912, conclui que aproximadamente 80% do tempo de aula é ocupado com as perguntas dos professores e as respostas dos alunos. A investigadora conclui ainda que os professores formulam duas a quatro perguntas por minuto deixando a questão: *Quando é que os alunos têm tempo para pensar?* (Neri de Souza, 2006).

Desde então que os estudos realizados na área asseveram as conclusões de Stevens relativamente à frequência das perguntas do professor na aula. Flanders, já na década de setenta, concluiu que os professores tendem a falar durante cerca de 70% do tempo letivo, sendo que os alunos apenas apresentam discurso em cerca de 20% desse tempo. Durante esses 70 valores percentuais que é dedicado ao discurso do professor, 70 a 80% diz respeito à formulação de perguntas (Ferreira, 2010). Pedrosa de Jesus (1987), na sua investigação acerca do questionamento de professores de Física e Química do Ensino Secundário, concluiu que "teachers use questions extremely frequently in their classroom dialogue, leading to a very fast questioning rhythm, with teachers using on average one question every 40 seconds" (p. 95).

Por outro lado, igualmente tendo como base uma investigação de Pedrosa de Jesus (1991) no âmbito da disciplina de Física e Química, constata-se que os alunos apenas formulam, em média, uma pergunta por semana. Com base em diversas investigações, Ferreira (2010) conclui ainda que "os alunos evitam formular perguntas" sendo estas "pouco frequentes e de baixo nível cognitivo" com a agravante de que "a frequência das perguntas dos alunos diminui progressivamente com prossecução de estudos para níveis de escolaridade superiores ou aumento da idade" (p. 66).

Poder-se-á assim questionar a razão pela qual o aluno não formula mais perguntas em sala de aula. Segundo Neri de Souza (2006), "Toda a pergunta solicita uma reação de resposta, por isso perguntar pode causar constrangimentos uma vez que obriga ao ouvinte a expressar uma resposta" (p. 91). Ferreira (2010) refere alguns fatores que poderão ser a causa da frequência diminuta das perguntas dos alunos, os quais surgem compilados em seguida:

- O professor domina o discurso criado em sala de aula (Dillon, 1988)
- O aluno tem medo de falhar e de mostrar a sua ignorância (Dillon, 1988)
- Há um défice de conhecimentos prévios ou dificuldade na identificação de conceitos (Graesser & Person, 1994)

Em suma, o discurso em sala de aula, e todos os elementos que o constituem, é um monopólio do professor, o que implica que a maior parte das perguntas formuladas sejam da sua autoria. Revela-se assim uma grande tendência para que o aluno não sinta que tenha o espaço necessário para ele próprio formular perguntas, uma vez que o professor está sempre a discursar. Por outro lado, quando formula questões, o professor não dá tempo suficiente ao aluno para este interpretar e reunir toda a informação necessária para responder. Relativamente a esta questão, assevera-se o papel que o professor assume ao dirigir um questionamento dito de qualidade em sala de aula. Segundo Almeida (2007), a forma como o professor coloca a resposta a uma pergunta do aluno influencia o seu comportamento, "podendo encorajá-las ou reprimi-las" (p. 39). Este é mais um fator que assevera a importância da postura do professor quando pratica o questionamento e as suas reações perante as perguntas e respostas dos alunos.

1.1.5. A pergunta do aluno

Se a quantidade de estudos sobre as perguntas do professor é abundante, como já referido, o número de investigações acerca da pergunta do aluno é bastante mais diminuto (Almeida, 2007). Segundo Pedrosa de Jesus (2000), a maioria dos estudos relativos à linguagem em sala de aula têm como foco o discurso do professor uma vez que este é maioritário em sala de aula, servindo assim como fator de "inibição de interações espontâneas dos alunos" (p. 149).

Especificamente, em relação ao aluno, as novas orientações para o processo de ensino/ e aprendizagem preveem o desenvolvimento da capacidade de comunicação e do poder de argumentação dos alunos. No Programa de Matemática para o Ensino Básico, (Damião et al., 2013), a comunicação matemática é identificada como uma competência a trabalhar.

Os estudos acerca das perguntas dos alunos iniciaram-se na década de sessenta. Embora já estudos anteriores tenham revelado alguma preocupação com esta questão, é apenas nesta década que se começa a identificar e caracterizar as realidades nas salas de aula no que diz respeito ao discurso do aluno (Pedrosa de Jesus, 2000).

No entanto, a pergunta do aluno é um fator importante no processo de ensino-aprendizagem, tal como afirma Almeida (2010): "learning does not occur until learners can raise their own questions" (p. 751). Quer isto dizer que a aprendizagem só ocorre quando o sujeito da aprendizagem identifica o que sabe, o que não sabe e sente necessidade de saber mais. Assim, passa a ser ele próprio capaz de formular perguntas de forma a saciar a sua vontade pelo conhecimento acrescido. Neri de Souza (2006) afirma ainda que "a arte e a ciência de formular perguntas é a fonte de todo o conhecimento" (p. 94).

Almeida (2007) considera também que "As perguntas [dos alunos] podem indicar que os alunos refletiram sobre as ideias apresentadas, e que estão a tentar estabelecer relações (…). Podem ainda revelar também a qualidade do pensamento dos alunos, assim como a sua compreensão conceptual" (p. 36).

Outro fator que confirma a importância da pergunta do aluno é referid por Barros (2008):

> "Uma educação centrada apenas nas respostas dos educandos tem-se mostrado ineficaz, cerceando drasticamente a colocação de perguntas, mesmo que elas surjam no íntimo dos alunos. Os educandos adotam, assim, uma postura passiva de recetores da informação, prevalecendo a fala e consequentemente, as perguntas do professor que, na maioria das vezes, têm a função de verificar se a matéria foi compreendida ou imprimir ritmo à aula garantindo a atenção e o feedback necessários." (p. 68)

Em suma, é possível concluir que o ato de questionar promove a autonomia e o interesse, contribuindo assim para que o aluno seja capaz de pensar por si próprio.

1.1.6. Categorização do questionamento

Embora o questionamento em sala de aula tenha começado a ser alvo de estudo no início do século XX, é apenas na década de sessenta que começa a existir uma preocupação acrescida com o tipo de perguntas que os professores formulam em sala de aula.

Como já mencionado, a forma como os professores formulam as perguntas em contexto de sala de aula apresenta uma grande influência no processo de ensino-aprendizagem. Almeida (2007), baseando-se na ideia de Carr (1998), afirma que "uma estratégia baseada em diferentes tipos de perguntas, estimula os alunos a conversarem e a articularem ideias, conceitos e práticas" (p. 28). Já Barros (2008) acredita que "é vantajoso expor os aprendentes a diferentes níveis e categorias de questões, para que possam mais tarde ser, também eles, questionadores de elevado nível" (p. 59).

Apesar dos vários pontos apresentados que confirmam a importância do questionamento em sala de aula e que o tipo de perguntas colocadas pelo professor influenciam o pensamento dos alunos, a realidade é que os professores tendem a basear as suas perguntas em níveis cognitivos baixos. Por exemplo, Pedrosa de Jesus (1987) verificou que 75% das perguntas formuladas pelo professor eram de nível cognitivo baixo, sendo apenas 5% perguntas abertas. Desse modo, se o professor se limitar a pôr em prática um questionamento que tenha como base perguntas que apenas requerem conhecimento factual e fazem apelo à memória, coloca os seus alunos numa posição vulnerável relativamente à sua aprendizagem. Assim, torna-se importante, antes de mais, estabelecer as diferenças concretas entre as perguntas que exigem diferentes níveis cognitivos.

São imensas as categorizações existentes para o questionamento em sala de aula, nomeadamente para classificar o tipo de perguntas que o professor formula. Moreira (2012) afirma mesmo que "É curioso verificar que o número que taxonomias para classificar o questionamento é quase tão elevado quanto o número de contextos em que as questões dos alunos foram exploradas e analisadas, para efeitos de investigação" (p. 29). Este número elevado deve-se ao facto de terem resultado de diferentes investigações, dirigidas por diferentes autores e com diferentes finalidades. Pedrosa de Jesus, Sá Correia e Abrantes (2005) corroboraram esta afirmação dizendo que "O questionamento pode ser visto a partir de vários ângulos e orientações teóricas" (p. 5).

Em 1970, Gall faz uma comparação de diversas categorizações das perguntas utilizadas até então concluindo que a maioria se baseia no processo cognitivo que é requerido para responder às perguntas. Confirma ainda que a frequência das perguntas dos professores em sala de aula continua elevada e conclui que a maioria das perguntas colocadas pelos professores apenas requerem que os alunos relembrem factos (Neri de Souza, 2006).

A Taxonomia de Bloom, de 1956, é ainda hoje das categorizações de perguntas mais utilizadas. Segundo Ferraz e Belhot (2010), esta

> "trouxe a possibilidade de padronização da linguagem no meio académico (…). Neste contexto, instrumentos de aprendizagem puderam ser trabalhados de forma mais integrada e estruturada, inclusive considerando os avanços tecnológicos que podiam prover novas e diferentes ferramentas para facilitar o processo de ensino e aprendizagem." (p. 423).

A finalidade primordial desta taxonomia é ajudar a identificar os objetivos ligados ao desenvolvimento cognitivo. Deste modo, a Taxonomia de Bloom estrutura-se segundo seis níveis de complexidade crescente, isto é, considera-se que "para adquirir uma nova habilidade pertencente ao próximo nível, o aluno deve ter dominado e adquirido a habilidade do nível anterior" (Ferraz & Belhot, 2010, p. 424). A figura que se segue mostra os níveis referidos, segundo a Taxonomia de Bloom.

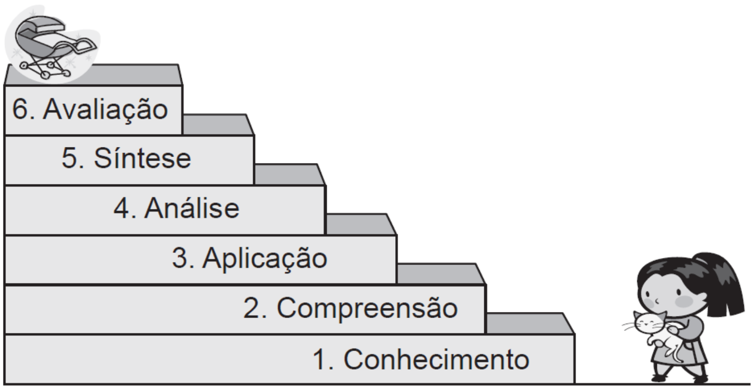


Figura 1. Categorias de domínio cognitivo: Taxonomia de Bloom

Nota Fonte: Ferraz, A. P. C. M., & Belhot, R. V. (2010). *Taxonomia de Bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais*. (p. 424) Gest. Prod., São Carlos, 17(2), 421–431

Ao nível do questionamento, nomeadamente o nível cognitivo da pergunta colocada e a capacidade revelada aquando da resposta, seguem-se as seis categorias resumidamente descritas segundo Reis (2011, p. 36):

- **Conhecimento**. Pretende-se que os alunos recordem algo.
- **Compreensão**. Pretende-se que os alunos demonstrem que compreendem de forma a organizar material.
- **Aplicação**. Pretende-se que os alunos apliquem conhecimentos previamente aprendidos na obtenção de uma resposta a um problema diferente.
- **Análise**. Pretende-se que os alunos examinem criticamente acontecimentos e realizem determinadas operações, como a separação de um todo em partes.
- **Síntese**. Pretende-se que os alunos produzam um trabalho original, façam previsões e/ou resolvam problemas.
- **Avaliação**. Pretende-se que os alunos respondam a uma pergunta que não tem uma resposta absoluta, apresentem palpites fundamentados acerca de uma solução possível para um problema ou formulem uma opinião fundamentada.

Outra categoria que vai ao encontro dos objetivos do presente estudo é a proposta por Pedrosa de Jesus (1987) e que se encontra de seguida em forma de quadro.

1. Conhecimento-Memória (C-M) Requerem a simples reprodução de factos, fórmulas e outros itens de conteúdo que apenas exigem apelo à memória.	Perguntas fechadas	Nível cognitivo baixo
2. Pensamento Convergente (PC) Envolvem a análise e a integração de informação fornecida e são desenhadas de forma a estimular processos mentais como associação ou explicação.		
3. Pensamento Divergente (PD) O aluno é livre de criar as suas próprias ideias, podendo considerar uma nova perspetiva ou direção num dado tópico.	Perguntas abertas	Nível cognitivo alto

4. Pensamento Avaliativo (PA) Exigem ao aluno que, ao responder, exprima o seu ponto de vista, justifique uma escolha ou defenda uma posição.		
5. Rotina (R) São utilizadas pelos professores para facilitar a gestão de sala de aula e a discussão, assim como para verificar a compreensão dos alunos.		
6. Retórica (Rh) São perguntas que não pretendem a obtenção de uma resposta e são usadas para reforçar uma informação.		

Quadro 1. Categorização de perguntas proposta por Pedrosa de Jesus em 1987

Nota Fonte: Pedrosa de Jesus, M. H. T. (1987). *A descriptive study of some science teachers questioning practices*. (p. 44) Dissertação de mestrado não publicada. U.K.: University of East Anglia.

Estabelecidas as categorias definidas por Pedrosa de Jesus (1987), compreender-se-á melhor agora as percentagens indicadas anteriormente relativamente ao tipo de perguntas formuladas pelo professor em sala de aula. No seu estudo, em que o foco principal foi o tipo de perguntas colocadas pelos professores de Física e Química, recorde-se que Pedrosa de Jesus (1987) conclui que a maioria das perguntas colocadas pelos ditos professores eram de baixo nível cognitivo, sendo ainda que uma percentagem alargada era dedicada às perguntas de retórica.

De acordo com Wellington (2000), uma forma genérica de classificar as perguntas resume-se em três categorias: abertas, fechadas e as ditas *pseudo*. Segundo o autor, as perguntas fechadas são as que simplesmente exigem o recurso à memória, pedem uma informação e raramente exigem pensamento. Por outro lado, as perguntas abertas são aquelas que exigem uma explicação pelas próprias palavras do aluno, induzindo assim um maior nível cognitivo. As perguntas *pseudo* (*pseudo-questions*) não são tidas como perguntas, no sentido da sua definição; são perguntas que o professor coloca mas já sabe a resposta ou esta não é exigida, podendo até ser simples instruções.

Fazendo um paralelismo entre as definições de Wellingon e a categorização proposta por Pedrosa de Jesus em 1987, pode-se constatar que as perguntas fechadas equivalem, no sentido lato, às perguntas de baixo nível cognitivo, as perguntas abertas coincidem com as perguntas de alto nível cognitivo e as *pseudo* dizem respeito às perguntas de rotina e de retórica.

Já em 2005, um estudo de Pedrosa de Jesus, Sá Correia e Abrantes (2005) acerca da importância do questionamento no desenvolvimento da competência reflexiva, as perguntas são divididas em quatro categorias:

- **Perguntas de Confirmação/Cooperação**. Perguntas de baixo nível cognitivo, próximas da retórica e das quais o professor espera uma resposta do tipo *sim* ou *não* para poder dar continuidade ao seu discurso.
- **Perguntas de Descrição/Eliciação**. Perguntas de baixo nível cognitivo, onde as respostas apenas exigem apelo à memória. São perguntas que se referem a situações de sala de aula, com o desenrolar de atividades ou o comportamento dos intervenientes.
- **Perguntas de Interpretação**. Perguntas de nível cognitivo mais elevado, onde quem as formula tem como intenção interligar a teoria e a prática e estimular a criatividade.
- **Perguntas de Avaliação**. São as perguntas de nível cognitivo superior, as quais pretendem obter juízos de valor, análises críticas e defesas de posições em relação a determinados temas, demonstrando conhecimento.

Ferreira (2010) estabelece sistemas de categorizações de acordo com diferentes funções que a pergunta pode tomar (o assunto relacionado com a função das perguntas é explorado de forma mais detalhada no subcapítulo seguinte: **A função da pergunta)**. Relativamente à função comunicativa da pergunta, Ferreira (2010) baseia-se em Almeida e Neri de Souza (2009), dividindo as perguntas em duas categorias, representadas no quadro seguinte:

<table>
<tr><td rowspan="2">Científicas
Perguntas diretamente relacionadas com os assuntos científicos abordados na aula ou outras perguntas científicas.</td><td>Perguntas fechadas
Perguntas que solicitam respostas exatas e factuais, bem como a confirmação/clarificação da informação já abordada pelo professor, tendo este uma resposta predeterminada como certa.</td></tr>
<tr><td>Questões abertas
Perguntas que podem originar várias respostas, possibilitando a integração dos conhecimentos pessoais, sociais, sensoriais e prévios dos alunos na (re)construção do novo conhecimento.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não científicas
Perguntas não relacionadas com assuntos científicos, de retórica, de rotina ou de gestão de aula.</td></tr>
</table>

Quadro 2. Categorização de perguntas proposta por Almeida e Neri de Souza em 2009

Nota Fonte: Ferreira, A. P. B. (2010). Questionamento dos professores: o seu contributo para a integração curricular. (pp. 69-71) Dissertação de mestrado. Aveiro: Universidade de Aveiro.

É em 1944 que Lazarsfeld se pronuncia acerca da real importância das perguntas abertas. O mesmo afirma que este tipo de perguntas permite "clarificar o significado das respostas", "discernir influência sobre as opiniões" e "clarificar a natureza das relações entre variáveis" (Almeida, 2007, p. 26). Com isto, é de facto importantíssimo o papel que o professor assume no questionamento, sendo uma tarefa fulcral a escolha do tipo de perguntas a colocar na medida em que, segundo Almeida (2007):

> "O uso frequente de perguntas *fechadas* dará origem a aulas em que prevalece o apelo à memória, e cujo controlo será mais fácil. Em oposição, as aulas em que predominam as questões *abertas* permitem que o aluno exponha as suas ideias, permitindo ao professor analisá-las." (p. 26)

Nesta lógica, importa ainda referir que o professor deverá estar preparado de forma a reagir da melhor forma às imprevisibilidades características de um ambiente de sala de aula. A temática relativa às estratégias a implementar com vista à melhoria do questionamento em sala de aula encontra-se no subcapítulo seguinte (**2.1.7. Estratégias para a melhoria do questionamento do professor**).

Como já referido, muitas são as categorizações das perguntas, as quais dependem de vários fatores e as subdividem em níveis hierárquicos. Porém, há que saber distinguir o nível das perguntas da sua qualidade. Segundo Watts e Pedrosa de Jesus (2006), referidos em Barros (2008), "não há más questões", isto é, não existem perguntas que sejam melhores que outras. O que na verdade se deve ter em conta é a adequação ecológica, didática e pedagógica das mesmas, no contexto em que se inserem e dependendo de diversos fatores. Explicando a ideia acima, basta concluirmos que não é conveniente formular perguntas de alto nível cognitivo caso o professor tenha consciência que os alunos não serão capazes de responder. Neste sentido, é importante que o professor conheça e saiba adequar o nível de perguntas a colocar na turma em que trabalha.

A função da pergunta

Quando o professor formula uma pergunta em sala de aula deverá ter em vista uma finalidade. Sendo o discurso do professor recheado de perguntas, com certeza estas terão finalidades distintas, consoante o contexto em que estão inseridas. Assim, é presumível concluir que as perguntas têm diferentes funções. Almeida (2007) apresenta uma revisão de literatura na qual compila as diferentes considerações de diversos autores acerca das funções que a pergunta do professor pode ter em contexto de sala de aula e a qual apresento de seguida, cronologicamente, em forma de quadro.

Autor(es)	Função da pergunta identificada
Wilen & Clegg (1986)	As perguntas dos professores são importantes porque permitem "a revisão de conceitos, o início e a condução de discussões, solicitação de *feedback* e a manutenção da atenção do aluno"
Newman & Goldin (1990)	"as perguntas dos professores podem promover o pensamento e a criatividade dos alunos"
Proudfit (1992)	As perguntas têm influência "no estímulo ao raciocínio dos alunos"

Brown & Wragg (1993)	As perguntas do professor permitem “a verificação da compreensão dos fenómenos e procedimentos, o reforço de um assunto abordado recentemente, e dar ao professor a possibilidade de orientar as explicações e /ou discussões para um determinado ponto da matéria”
Garrido & Carvalho (1993)	“as perguntas do professor permitem identificar as conceções alternativas dos alunos e alterá-las”
Kuskie & Kuskie (1994)	As perguntas são “um bom instrumento para verificar o nível de interesse dos alunos”
Oakes (1996)	“as perguntas são formuladas como meio de manter o ritmo da aula e envolver todos os alunos”
Pedrosa de Jesus (1996)	“as perguntas do professor permitem ajudar à formulação e resolução de problemas e à gestão das aulas”
Durham (1997)	“os professores usam as perguntas para dirigir as atividades durante a aula”
Wellington (2000)	“As perguntas do professor podem também ter a função de controlo dos alunos e da aula, de estímulo à curiosidade e ao interesse, e de testes aos conhecimentos dos alunos”

Quadro 3. A função da pergunta do professor segundo diversos autores

Com isto, e tendo em conta as principais funções do questionamento dos professores identificadas por Barros (2008), com base em Pedrosa de Jesus (1987, 1991), é possível condensar as considerações dos diferentes autores em nove funções da pergunta do professor aglutinadoras:

- Controlo do comportamento dos alunos;
- Ajuda à gestão da aula;
- Verificação da compreensão da matéria;
- Obtenção de feedback;
- Ajuda à revisão de conceitos;
- Avaliação da retenção de informação;
- Estímulo ao desenvolvimento de capacidades de raciocínio;

- Estímulo à curiosidade intelectual;
- Ajuda à formulação e resolução de problemas.

(p. 78)

Perante o exposto, e embora a frequência das perguntas dos alunos seja bastante mais baixa comparativamente com a frequência das perguntas do professor, coloca-se a questão: *Porque é que o aluno formula uma pergunta?* Almeida (2007), baseando-se nos estudos de Pedrosa de Jesus em 1991, enumera as principais funções das perguntas dos alunos, as quais se encontram de seguida:

- O reforço da pergunta do professor;
- Procura de concordância e/ou apoio;
- Confirmação de "frações" de informação;
- Pedidos de informação;
- Pedidos de clarificação;
- Procura de orientação na identificação ou resolução de problemas;
- Procura de orientação quando fazem inferências ou testam hipóteses;
- Procura de orientação em procedimentos experimentais, e
- Perguntas de ajuda à gestão da aula (perguntas de rotina).

(p. 36)

1.1.7. Estratégias para a melhoria do questionamento do professor

Identificado o questionamento como uma ferramenta imprescindível no processo de ensino e aprendizagem e sendo detetadas falhas ao nível do tipo de questionamento praticado pelo professor em sala de aula, é em meados do século XX que se começa a estabelecer estratégias para a melhoria do questionamento praticado.

Em 1978, Hargie enumera algumas conclusões que retirou da literatura acerca das perguntas dos professores (Neri de Souza, 2006):

- “maior atenção deveria ser dada aos meios através dos quais os professores possam formular perguntas que promovam o raciocínio, ao contrario das perguntas factuais ou de memória”;
- “as perguntas orais parecem ser mais eficiente do que as perguntas escritas em sala de aula”;
- “o uso das perguntas pelos professores para a sondagem é uma importante característica do seu questionamento”;
- “os professores podem aumentar a eficiência das suas apresentações através de perguntas únicas, pelo redireccionamento das perguntas de um aluno para outro, e pelo aumento das pausas após as perguntas, ou após as respostas às perguntas”.

  (p. 107)

No entanto, Cazden (1988), mencionado por Ferreira (2010), considera que “as aulas, em todos os níveis de escolaridade, seguem a tradicional sequência: iniciação-resposta-avaliação. A iniciação é encetada pelas perguntas dos professores, seguidas da resposta do aluno e posterior avaliação do professor” (p. 74). Esta *tradicional sequência*, tal como Ferreira (2010) denomina, condiciona fortemente a estrutura da aula uma vez que o professor assevera a sua posição de *coordenador máximo* do que é realizado e dito na aula, na medida em que é quem “seleciona os conteúdos, independentemente dos interesses motivações dos alunos, (…), estabelece uma relação assimétrica em sala de aula” (p.74). Este facto faz passar a ideia aos alunos, voluntária ou não, que é o professor quem detém o direito de formular perguntas, sendo que a eles [os alunos] apenas lhes cabe responder (Ferreira, 2010).

Assim, e já que as perguntas podem servir como um “meio de manter o ritmo da aula e envolver todos os alunos” ou mesmo como “um bom instrumento para verificar o nível de interesse dos alunos” (Almeida, 2007, p. 24), é importante que, ao planificar uma aula, “o professor prepare as suas perguntas e as analise, de modo a verificar se há um equilíbrio” (Almeida, 2007, p. 25) entre os diferentes níveis cognitivos das perguntas uma vez que esse equilíbrio influência as formas de pensar dos alunos.

Já em 1996, Wellington et al. acreditavam que preparar as aulas, nomeadamente, preparar as perguntas a colocar nas aulas era importantíssimo, definindo três etapas fundamentais:

- "Elaboração da pergunta". Devem ser preparadas perguntas-chave, de acordo com os objetivos definidos para aula em causa, numa linguagem clara e adequada ao nível de ensino;
- "Apresentação das perguntas". O professor deve-se posicionar num local que veja todos os alunos e que possa igualmente ser visto por todos, dirigindo a pergunta para que todos sejam potenciais alvos. Deve ainda procurar criar momentos que estimulem a reflexão e a explicação utilizando perguntas como "O que queres dizer com isso?", " O que te faz dizer isso?" ou "Porque é que isso acontece?"; e
- "Modo como nos posicionamos perante as respostas". O professor não deve esperar demasiado tempo pela resposta de forma a não embaraçar o aluno, deve elogiar as respostas mesmo quando erradas ou quando não coincidem com o que o professor espera e deve ainda desencorajar que os outros colegas ridicularizem um aluno que tenha respondido erradamente.
(Medeiros, 2000, p. 43)

Como já dito anteriormente, e visto que as perguntas dos alunos revelam estruturação do pensamento, Coutinho (2012) considera que "os professores e formadores devem ser encorajados a utilizar estratégias que facilitem a reflexão, levando os alunos a participar em discussões através de colocação de perguntas" (p. 12), uma vez que "a utilização de perguntas é vista como uma estratégia-chave" para formar "cidadãos capazes de criar conhecimento e serem autónomos" (Pedrosa de Jesus, Sá Correia & Abrantes, 2005, p. 5). Esta linha de pensamento vem reforçar que as perguntas que o professor coloca têm uma grande influência nas perguntas que os alunos elaboram.

Wellington (2000) apresenta algumas "mini" estratégias quando se faz uso do questionamento, as quais são apresentadas de seguida. Essas são o resultado de observações de ambientes de aprendizagem onde o questionamento pareceu uma ferramenta eficaz na aprendizagem dos alunos:

- “Pausing”. Geralmente, os professores esperam cerca de um segundo para obter a resposta, incentivando assim a impulsividade e o pensamento superficial. Desta forma, negam o acesso aos alunos que preferem “to think before speaking”. Se a pausa for alongada para cerca de 4 ou 5 segundos, será fomentado o pensamento crítico e profundo sobre a questão colocada.
- “Bouncing”. Por vezes, os professores tendem a assumir que toda a turma compreendeu já que um dos alunos respondeu acertadamente. No entanto, existem perguntas que podem ser colocadas à restante turma para perceber se de facto o assunto ficou compreendido incentivando o desenvolvimento de ideias, como por exemplo “Concordas com o teu colega?” ou “Porque é que achas que a tua colega está correta?”.
- “Wrong asnwers”. Nem sempre é totalmente positivo os professores corrigirem as respostas erradas, uma vez que a própria resposta significa que o aluno se interessou pela pergunta colocada. Ao invés, a resposta errada pode ser levada para a criação de ambientes de aprendizagem.
- “Third-party ideias”. Uma alternativa para fomentar o pensamento na aula é questionar os alunos sobre as ideias de outras pessoas, pois, geralmente, os alunos estão mais dispostos a discutir essas ideias do que apresentar as suas próprias ideias.
- “Diagnostic questioning”. O principal objetivo neste tipo de perguntas é o professor perceber qual é o conhecimento que os alunos têm acerca de determinado conteúdo. No entanto, o problema parece ser o facto de os alunos assumirem que essas perguntas servem para os avaliar e portanto sentem-se na obrigação de responder acertadamente. Uma forma de mostrar aos alunos que são efetivamente perguntas de diagnóstico é incluir palavras como “tu” ou “teus” na sua formulação.
- “Turning telling into asking: Socratic questioning”. O termo *Socratic questioning* diz respeito a questões que são colocadas de forma capciosa para levar o próprio aluno à construção do conhecimento.
- “Curiosity”. A curiosidade pode ser utilizada como um fator que, uma vez que leva ao questionamento, então melhora a aprendizagem.

(p. 90)

Tal como Wellington (2000) considera o tempo de espera (ao qual denomina *pausing*) um factor influente na melhoria do processo de questionamento, já Mary Budd Rowe, em 1974, tinha identificado a importância desta característica no próprio processo do questionamento. Ao iniciar as suas investigações acerca do tempo de espera, concluiu que "apenas três das 200 aulas gravadas exibiam exemplos de perguntas dos alunos aos colegas ou ao professor" e "[os professores] usavam pausas que geralmente duravam menos de um segundo" (Neri de Souza, 2006, p. 107). Também Pedrosa de Jesus, em 1991, concluiu que os professores de Física e Química esperavam apenas cerca de 1 segundo após colocar uma pergunta e prosseguir com o discurso.

De facto, quando é comparado o tempo de espera com a frequência das perguntas dos professores em sala de aula, é possível concluir que, em média, os professores fazem 2 a 3 perguntas por minuto e esperam menos de um segundo para obter a resposta do aluno. Efetivamente não é dado ao aluno o tempo suficiente para recordar as informações necessárias e estruturar o pensamento de forma a responder às perguntas colocadas. Deste modo, é natural que os alunos não estabeleçam as ferramentas necessárias para a estruturação do pensamento e, consequentemente, sejam o interveniente menos ativo no discurso que é criado em sala de aula. Em 1978, tanto a investigação de Dillon como os trabalhos de Napell "sugerem que as perguntas dos professores desencorajam o pensamento dos alunos em vez de o estimular" (Neri de Souza, 2006, p. 108).

Entre a década de setenta e a década de oitenta, vários autores chegaram à conclusão que era possível "treinar" os professores a aumentarem o tempo de espera. Nesse sentido, criaram algumas estratégias para esse fim e, McGlathery (1978) aponta ainda as consequências do aumento do tempo de espera dos professores. O aumento do tempo de espera resulta então no aumento:

> "i) do tamanho das respostas dos alunos, ii) do número apropriadas e não solicitadas, iii) da confiança dos alunos, iv) da incidência de respostas especulativas, v) da frequência de perguntas dos alunos, vi) da incidência de respostas dos alunos «relativamente lentos», vii) da interação entre os alunos, viii) do número de experiências proposta pelos alunos e ix) na diminuição de respostas «não sei» e erradas." (Neri de Souza, 2006, p. 108)

Perante o exposto, também o momento da aula em que as perguntas são colocadas é importante e portanto deve ser considerada. Segundo Wellington (2000), existem cinco "best times to ask" (p. 114). No início da aula, por exemplo, para fazer a ligação com a aula passada, de forma a rever e reforçar os conteúdos e elucidar os alunos. Durante o desenvolvimento da própria aula, colocando perguntas-chave que orientem os alunos no seu pensamento. Durante as tarefas propostas de forma a resolver problemas, quer em pequeno grupo, quer de forma individual e no final das tarefas para concluir. Também o final da aula é uma altura propícia para rever e reforçar os conteúdos, avaliar a compreensão do tema pelos alunos e preparar a aula seguinte.

Na tentativa de responder à questão "como devem as questões ser preparadas e colocadas na aula?", Wellington (2000) elaborou um quadro com indicações para a preparação das questões, apresentação das mesmas e formas de lidar com as respostas dos alunos. De forma a não sobrecarregar o presente capítulo, e porque já algumas das indicações foram referidas, encontra-se em anexo o quadro mencionado. **(1. Guião para o questionamento proposto por Wellington)**.

Também Barros (2008) reúne algumas práticas a evitar, resultado das indicadas por Brown e Atkins (1988):

- "Fazer muitas perguntas de uma única vez";
- "Colocar uma pergunta e responder, sem dar oportunidade ao aluno";
- "Dirigir as perguntas aos melhores alunos ou aos mais simpáticos para o professor";
- "Elaborar questões difíceis muito cedo";
- "Colocar sempre perguntas do mesmo tipo";
- "Fazer perguntas de modo ameaçador".

(p. 72)

Baseando-se em Dillon (1988), Ferreira (2010) estabelece um conjunto de passos que o professor deve seguir para melhorar o seu perfil de questionamento e que conduzem à reposição das perguntas como "elementos estruturantes da integração curricular". Em primeira instância, aquando da planificação de uma aula, "os professores devem refletir nas questões que pretendem formular, atendendo ao seu propósito, circunstancia e comportamento” não descuidando “a quem vai ensinar, ao conteúdo a ensinar e a como vai ensinar.” É também parte do processo de melhoria a reflexão das práticas, nomeadamente no que diz respeito a fatores como “a frequência, o tempo, a forma e o modo como vai desenvolver o seu questionamento” (Ferreira, 2010, pp. 74-75).

Em suma, o professor deve ter em atenção o tipo de questionamento que produz em sala de aula, considerando as perguntas que coloca e tendo presente a sua influência em contexto de sala de aula, uma vez que é uma ferramenta poderosa no desenvolvimento do pensamento dos alunos e, consequentemente, um fator proativo na construção do conhecimento. Assim, o docente deve preparar e planificar as perguntas que coloca, não descuidando o seu efeito na aula.

1.2. Indicadores de idoneidade didática no processo de ensino e aprendizagem da Matemática

A essência de um processo de ensino-aprendizagem de qualidade é fundamentalmente o professor. Assim, é desejável que este possua um conjunto de conhecimentos e competências para que o processo seja não só eficiente como também eficaz (Godino, 2009).

Ao nível da Matemática, Shoenfeld e Kilpatrick (2008), mencionados por (Godino, 2009), apresentam sete dimensões a ter em conta enquanto competências profissionais do professor de Matemática:

- Conhecer os conteúdos programáticos com profundidade e amplitude de forma a conhecer várias estratégias e representações; compreender os elementos-chave de cada tópico e estabelecer conexões com outros tópicos;
- Reconhecer os alunos como pessoas que pensam de formas diversas, levando assim a distintas formas de construção de conhecimento;
- Reconhecer os alunos como pessoas que aprendem, nomeadamente no processo de escolha de tarefas a realizar;
- Planear e gerir ambientes de aprendizagem ativa;
- Desenvolver práticas em sala de aula que potenciem um ambiente de ensino para a compreensão, exigindo que os alunos expliquem e justifiquem respostas, que sejam críticos na análise de argumentos e que coloquem dúvidas;
- Desenvolver atividades que forcem os alunos a relacionar-se não apenas entre si, como também com os conteúdos programáticos;
- Refletir sobre a própria prática no sentido de a melhorar.

Nesta linha de orientação surge o presente capítulo o qual apresenta as facetas e os níveis de análise do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, assim como os indicadores da idoneidade didática nas suas diversas vertentes.

1.2.1. A teoria da idoneidade didática

Antes de prosseguir, urge a necessidade de esclarecer o uso da palavra “idoneidade” em vez de “adequação”, o que reporta ao próprio significado de cada uma das palavras consideradas.

Segundo o Dicionário Priberam da Língua Portuguesa (Priberam Informática S.A., 2013), “idoneidade” define-se como “Qualidade de idóneo” e “Aptidão adquirida pela prática”, remetendo para a palavra “idóneo” que, por sua vez, deriva do latim IDONEUS o que significa “próprio para, apto para, útil, conveniente, favorável”, ou seja, “Que é apropriado para alguma coisa”, “Que tem condições, competências, habilitações ou conhecimentos necessários para desempenhar determinado cargo ou determinada tarefa”. Por sua vez, e com base na mesma referência, “adequação” deriva do latim ADAEQUATIO que significa “ação de igualar”, tornando assim a palavra considerada como o ”Acto de adequar ou de se adequar”. Neste sentido, é possível concluir que o substantivo feminino “idoneidade” se relaciona mais intimamente com o assunto tratado ao invés de “adequação”, motivo pelo qual escolho o uso pela primeira palavra.

De forma a “articular diferentes pontos de vista e noções teóricas sobre o conhecimento matemático, o seu ensino e aprendizagem” (Godino, 2009, p. 20) surgiu um marco teórico na Didática da Matemática: o Enfoque Ontosemiótico (EOS). O EOS deve ser visto como uma ferramenta de análise e reflexão sobre os processos de ensino e aprendizagem que ajuda a compreender e analisar, de forma sistemática, os diversos aspetos considerados no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Segundo Godino (2009), o EOS é um modelo poliédrico que indica várias facetas e níveis de análise do processo de ensino e aprendizagem.

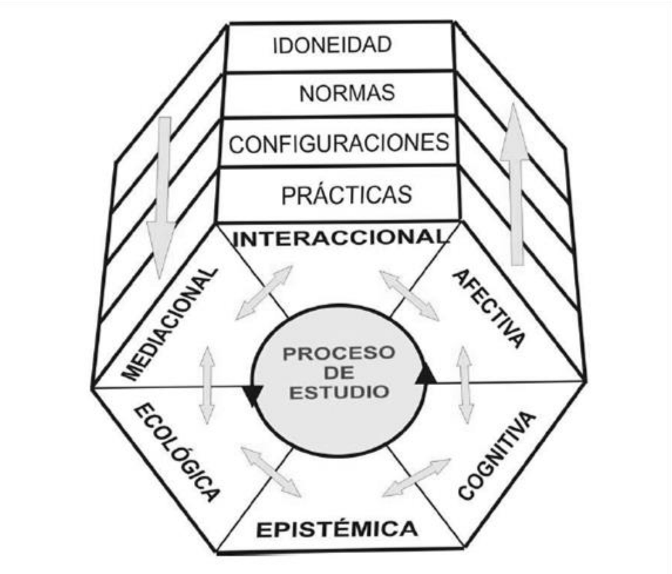


Figura 2. Facetas e níveis de análise

Nota Fonte: Godino, J. D. (2009). *Categorías de Análisis de los conocimientos del Professor de Matemáticas*. (p. 21) Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31

As facetas a ter em conta na análise do processo educativo são (Godino, 2009):

- **Epistémica**: diz respeito aos conhecimentos matemáticos relativos ao contexto institucional em que se realiza o processo de estudo e à distribuição dos conteúdos no tempo (problemas, linguagens, procedimentos, definições, propriedades, argumentos);
- **Cognitiva**: relaciona-se com os conhecimentos pessoais dos alunos e a progressão das suas aprendizagens;
- **Afetiva**: são os estados afetivos de cada aluno (atitudes, emoções, crenças, valores) relativamente aos objetos matemáticos e ao processo de estudo seguido;
- **Mediacional**: diz respeito aos recursos tecnológicos e à alocação do tempo das diversas ações e processos;
- **Interacional**: são os padrões de interação professor-aluno e aluno-aluno e a sequência destas interações orientada para a fixação de significados;
- **Ecológica**: relaciona-se com os contextos socioculturais (social, politico, económico, …) que condicionam o processo de ensino-aprendizagem.

Estas facetas devem ainda ser sujeitas a vários níveis de análise: as práticas matemáticas e didáticas que consistem na descrição das ações realizadas para resolver as tarefas propostas de forma a contextualizar os conteúdos programáticos e promover a aprendizagem; as configurações dos objetos e processos que se baseiam na descrição destes; as normas que condicionam e suportam as práticas, afetando cada faceta; e a valorização da idoneidade ou adequação do processo educativo. (Godino, 2009).

Como se pode observar com o esquema poliédrico anterior, o EOS tem ainda em conta diversas dimensões e as próprias relações entre elas: as facetas epistémica e ecológica da Matemática assumem pressupostos antropológicos/socioculturais; as facetas cognitiva e afetiva adotam pressupostas semióticos; as facetas internacional e mediacional que assumem uma perspetiva sócio construtiva; e, por ultimo, um modelo sistémico-ecológico que relaciona todas as dimensões anteriores. (Godino, 2009, 2011).

Com a introdução dos EOS, tornou-se possível construir critérios de idoneidade para as diferentes facetas, tal como Godino, Batanero e Font (2007) apresentam:

- Idoneidade epistémica: refere-se ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados (ou previstos), relativamente a um significado ou referência (Godino et al., 2009);
- Idoneidade cognitiva: expressa o grau no qual os significados pretendidos/implementados estão na zona de desenvolvimento dos alunos, assim como a proximidade dos significados pessoais com os significados pretendidos/implementados (Godino et al., 2009);
- Idoneidade interacional: forma em que os modos de interação permitem identificar e resolver conflitos de significados e favorecem a autonomia e aprendizagem dos alunos (Godino et al., 2009);
- Idoneidade mediacional: disponibilidade e adequação dos recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem (Godino et al., 2009);
- Idoneidade emocional/afetiva: grau de implicação (interesse, motivação, …) dos alunos no processo educativo que depende não apenas de fatores relacionados com a instituição de ensino como também do próprio aluno e a sua história escolar (Godino, 2011);

- Idoneidade ecológica: relaciona-se com a adaptação do processo de ensino em relação ao projeto educativo, às diretrizes curriculares, às condições sociais, etc. (Godino et al., 2009).

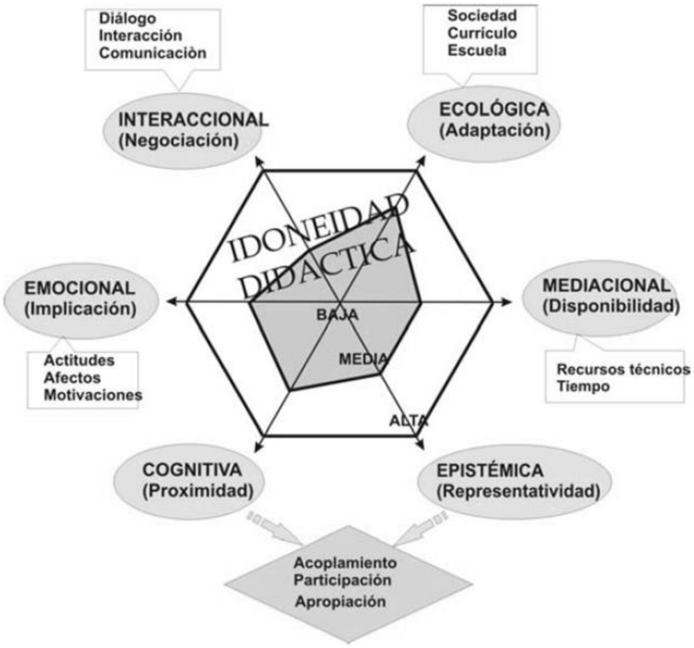


Figura 3. Idoneidade didática

Nota Fonte: Godino, J. D. (2009). *Categorías de Análisis de los conocimientos del Professor de Matemáticas*. (p. 24) Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31

Importa ainda referir que uma elevada idoneidade numa destas dimensões não implica elevada idoneidade nas restantes, tal como afirmam Godino, Batanero e Font (2007):

> "Given preference to the difference criteria will depend on the interactions among them; (…). This didactical suitability is relative to temporal, contextual and changing circumstances, which requires an inquiring and reflective attitude from the teacher and the people sharing the responsibility of an educational project." (pp. 7-8).

1.2.2. Indicadores de idoneidade didática

Definidas as dimensões a analisar, o EOS fornece ainda um conjunto de indicadores de cada uma das diferentes facetas, ainda divididos por componentes, tal como se apresenta de seguida sobre a forma de quadros. Pretende, desta forma, facilitar o processo reflexivo do profissional de docência.

Idoneidade epistémica

Tal como referido anteriormente e, segundo Godino (2011), um processo de ensino-aprendizagem, em todas as suas dimensões, possui maior idoneidade didática (matemática) “en la medida en que los contenidos implementados (o pretendidos) representan bien a los contenidos de referencia” (p. 8). O autor afirma ainda que para alcançar altos níveis de idoneidade epistémica se devem escolher tarefas ricas que permitam aos alunos abordá-las e representá-las de diversas formas e que exijam que os alunos conjeturem, interpretem e justifiquem as soluções.

COMPONENTES	INDICADORES
Situações-problemas	– Apresenta-se uma amostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercitação e aplicação – Propõem-se situações de criação de problemas (problematização)
Linguagem	– Utiliza-se diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traduções e conversões entre os mesmos – Usa-se um nível de linguagem adequada aos alunos a que se dirige – Propõem-se situações de expressão matemática e interpretação
Regras (definições, proposições, procedimentos)	– As definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem – Apresenta-se os enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo – Propõe-se situações onde os alunos tenham que gerar ou negociar definições proposições ou procedimentos
Argumentos	– As explicações, verificações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem

	– Promove-se situações onde o aluno tem que argumentar
Relações	– Os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições, etc.) relacionam-se e conectam-se entre si – Identificam-se e articulam-se os diversos significados dos objetos que intervém nas práticas matemáticas

Quadro 4. Componentes e indicadores de idoneidade epistémica

Nota Fonte: Godino, J. D. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. (p. 9) CIAEM-IACME, XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (pp. 1–20). Recife. Brasil.

Idoneidade cognitiva

Quando é referida a idoneidade cognitiva tem-se em conta em que medida os conteúdos implementados favorecem o desenvolvimento dos alunos. Godino (2011) afirma ainda que três dos seis princípios fundamentais formulados pelo NCTM relacionados com o ensino da matemática, contemplam a idoneidade cognitiva: “Se exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas, y que sean incluidos contenidos motivadores para promover el acceso y el logro de todos los estudiantes.” (p. 10).

COMPONENTES	INDICADORES
Conhecimentos prévios (Tem-se em conta os mesmo elementos da idoneidade epistémica)	– Os alunos tem os conhecimentos necessários para o estudo do tema – Os conteúdos pretendidos são atingíveis, nas suas diversas componentes
Adaptações curriculares às diferenças individuais	– Inclui-se atividades de aplicação e reforço – Promove-se o acesso e o desenvolvimento a todos os alunos
Aprendizagem (Tem-se em conta os mesmos elementos da idoneidade epistémica)	– Os diversos modos de avaliação indicam que os alunos se apropriam dos conhecimentos, compreensões e competências pretendidas (Compreensão conceptual e proposicional, comunicativa e argumentativa, situacional; fluência procedimental; competência metacognitiva – A avaliação tem em conta diferentes níveis de compreensão e competências – Os resultados das avaliações propaga-se e é usada para tomar decisões

Quadro 5. Componentes e indicadores de idoneidade cognitiva

Nota Fonte: Godino, J. D. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. (p. 10) CIAEM-IACME, XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (pp. 1–20). Recife. Brasil.

Idoneidade afetiva

Tal como afirma Godino (2011), "La resolución de cualquier problema matemático lleva asociada una situación afectiva para el sujeto implicado" que também "moviliza creencias, actitudes, emociones o valores" (p. 11). Desta forma, a idoneidade afetiva baseia-se no interesse e motivação que os alunos têm no processo de ensino-aprendizagem.

COMPONENTES	INDICADORES
Interesses e necessidades	– As tarefas têm interesse para os alunos – Propõem-se situações que permitam compreender a utilidade da matemática na vida quotidiana e profissional
Atitudes	– Promove-se a participação em atividades, a preserverância, a responsabilidade, etc. – Favorecesse-se a argumentação em situações de igualdade; o argumento é valorizado por si mesmo e não por quem o diz
Emoções	– Promove-se a autoestima, evitando a rejeição, fobia ou o medo da matemática – Destacam-se as qualidades estéticas e de precisão da matemática

Quadro 6. Componentes e indicadores de idoneidade afetiva

Nota Fonte: Godino, J. D. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. (p. 11) CIAEM-IACME, XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (pp. 1–20). Recife. Brasil.

Idoneidade interacional

As interações criadas em sala de aula, quer entre os alunos e o docente, os alunos entre si ou em grupos de trabalho, são favoráveis para a criação de um ambiente de aprendizagem ativa e permitem identificar e resolver conflitos ao nível dos significados. Godino (2011).

COMPONENTES	INDICADORES
Interação professor-aluno	– O professor faz uma apresentação adequada ao tema (clara e bem organizada, não falando rápido demais, enfatizando os conceitos chave, etc.) – Reconhece e resolve os conflitos dos alunos – Tenta-se chegar a um consenso com base no melhor argumento – Usa diversos recursos retóricos e argumentativos para captar a atenção dos alunos – Facilita a inclusão dos alunos na dinâmica da aula
Interação entre alunos	– Favorece-se o diálogo e comunicação entre os alunos – Os alunos tentam convencer-se a si mesmos, e os outros, da validade das suas afirmações, conjeturas e respostas, apoiando-se em argumentos matemáticos – Favorece-se a inclusão no grupo e evita-se a exclusão
Autonomia	– Contemplam-se momentos em que os alunos assumem a responsabilidade da aprendizagem (fazem perguntas e apresentam soluções; exploram exemplos e contra exemplos para investigar e conjeturar; usam diversas ferramentas para raciocinar, fazer conceções e resolver problemas)
Avaliação formativa	– Observação sistemática do progresso cognitivo dos alunos

Quadro 7. Componentes e indicadores de idoneidade interacional

Nota Fonte: Godino, J. D. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. (p. 12) CIAEM-IACME, XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (pp. 1–20). Recife. Brasil.

Idoneidade mediacional

Também com enfoque no NCTM, a idoneidade mediacional relaciona-se diretamente com a utilização dos recursos materiais e temporais adequados ao desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem. Mais especificamente e relativamente ao uso da tecnologia do processo de ensino-aprendizagem da matemática, o NCTM defende que “These tools, including those used specifically for teaching and learning mathematics, not only complemente mathematics teaching and learning but also prepare all students for their future lives, which technology will influence every day.” (NCTM, 2008).

COMPONENTES	INDICADORES
Recursos materiais (manipuláveis, calculadoras, computadores)	– Usam-se materiais manipuláveis e informáticos que permitem introduzir situações, linguagens, procedimentos e argumentações adaptadas ao conteúdo pretendido – As definições e propriedades são contextualizadas e motivadas usando situações e modelos concretos e visualizações
Número de alunos, horário e condições da aula	– O número e a distribuição dos estudantes permitem o processo de ensino – O horário das aulas é apropriado – A sala de aula e a distribuição dos alunos devem ser adequado para o desenvolvimento do processo de ensino
Tempo (Ensino coletivo/ tutoria, tempo de aprendizagem)	– O tempo (presencial e não presencial) é suficiente para o ensino pretendido – Dedica-se tempo suficiente aos conteúdos mais importantes do tema – Dedica-se tempo suficiente aos conteúdos que apresentam maiores dificuldades de compreensão

Quadro 8. Componentes e indicadores de idoneidade mediacional

Nota Fonte: Godino, J. D. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. (p. 13) CIAEM-IACME, XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (pp. 1–20). Recife. Brasil.

Idoneidade ecológica

De forma sucinta, tal como afirma Godino (2011), a idoneidade ecológica "… se refiere al grado en que un plan o acción formativa para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno en que se utiliza", isto é, "todo lo que está fuera del aula, condicionando la actividad" (p. 14).

COMPONENTES	INDICADORES
Adaptação ao currículo	– Os conteúdos, a sua implementação e avaliação correspondem com as diretrizes curriculares
Adaptação face a inovação didática	– Inovação baseada na investigação e prática reflexiva – Integração de novas tecnologias no projeto educativo (calculadores, computadores, TIC, etc.)
Adaptação socioprofissional e cultural	– Os conteúdos contribuem para a formação socioprofissional dos estudantes

Educação em valores	– Contempla-se a formação de valores democráticos e o pensamento crítico
Conexões intra e interdisciplinares	– Os conteúdos relacionam-se com outros conteúdos intra e interdisciplinares

Quadro 9. Componentes e indicadores de idoneidade ecológica

Nota Fonte: Godino, J. D. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. (p. 14) CIAEM-IACME, XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (pp. 1–20). Recife. Brasil.

Capítulo 2 - Metodologia

O presente capítulo refere e justifica as opções de natureza metodológica usadas neste estudo, tendo em conta não apenas as finalidades do mesmo mas de igual forma as restrições envolvidas. Caracterizam-se ainda os participantes do estudo, identificando-se as fases do estudo e os instrumentos de recolha de dados. Por fim, é descrito o processo de tratamento e análise dos dados.

2.1. Opções metodológicas

O presente estudo tem como principais finalidades identificar as minhas principais dificuldades ao estruturar a dinâmica do questionamento num contexto de aula e aperfeiçoar as minhas práticas docentes a este nível. Para alcançar estas finalidades, definiram-se três questões de investigação, já anteriormente referidas. Na tentativa de responder às questões formuladas optou-se por um estudo de natureza qualitativa, tendo em consideração a sua definição por Bodgan e Biklen (1994) e as cinco características que a completam. Os mesmos autores afirmam que:

> "o objetivo dos investigadores qualitativos é o de melhor compreender o comportamento e experiência humanos. […] Recorrem à observação empírica por considerarem que é em função de instâncias concretas do comportamento humano que se pode refletir com maior clareza e profundidade sobre a condição humana." (p. 70)

A afirmação anterior vai ao encontro das finalidades estabelecidas para o presente estudo. Tal como os autores acima consideram,

> "Nem todos os estudos que consideraríamos qualitativos patenteiam estas características com igual eloquência. […] A questão não é tanto a de se determinada investigação é ou não totalmente qualitativa; trata-se sim de uma questão de grau." (p. 47)

Com isto, apresentam-se as cinco características enunciadas por Bodgan e Biklen e em que medida são adequadas ao estudo em causa:

1. “Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.” (p. 47)

   A fonte direta de dados resultou da gravação áudio e vídeo (e posterior transcrição) das aulas dadas por mim numa turma do 9.º ano de escolaridade. Também as notas de campo produzidas por mim e pelas orientadoras do estudo auxiliaram a análise das aulas dadas.
2. “A investigação qualitativa é descritiva” (p. 48)

   Como já referido, foram recolhidos dados através de registos áudio e vídeo e notas de campo produzidas por mim. Assim, é um estudo fundamentalmente descritivo de situações decorrentes em sala de aula por forma a compreender, de forma mais esclarecedora, as dinâmicas de questionamento implementadas.
3. “Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos” (p. 49)

   O presente estudo tem como finalidade compreender as dificuldades em formular perguntas de forma a aperfeiçoar as práticas de questionamento. Desta forma, o foco não será avaliar as perguntas formuladas mas sim todo o processo decorrente durante o ano letivo, identificando as principais falhas, as estratégias de melhoria da prática docente, os erros cometidos e mesmo os recuos.
4. “Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.” (p. 50)

   Tal como já anteriormente referido, o presente estudo não pretende confirmar ou rejeitar hipóteses construídas previamente, mas sim perceber quais as principais falhas quando se formulam perguntas e as estratégias de melhoria implementadas.
5. “O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.” (p. 50)

   Os dados recolhidos pretendiam dar resposta às perguntas formuladas por forma a perceber toda a envolvente vivida aquando da implementação de cada aula planificada, no sentido de dar a conhecer a minha interpretação das minhas próprias práticas.

Com a aplicação do questionário aos alunos poder-se-ia indagar sobre a natureza quantitativa do estudo. No entanto, o questionário foi aplicado apenas numa turma, com 26 alunos e o objetivo primordial seria recolher opiniões dos alunos acerca das várias características do meu questionamento em sala de aula. Deste modo, a análise é substancialmente qualitativa na medida em que analisa as opiniões gerais dos alunos e não os números que representam.

O presente estudo também se pode englobar numa metodologia de estudo de caso na medida em que, segundo Ponte (2006),

> "Um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. […] É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial […]" (p. 2)

Para Bodgan e Biklen (1994), "O estudo de caso consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico" (p. 89).

De facto, o estudo foca-se essencialmente na observação das práticas docentes, nomeadamente na formulação de perguntas nas aulas dadas a uma turma do 9.º ano de escolaridade.

Por outro lado, Bodgan e Biklen (1994) afirmam que "A investigação-ação consiste na recolha de informações sistemáticas com o objetivo de promover mudanças sociais" (p. 292) o que também se enquadra no estudo. Os autores afirmam ainda que um estudo desta natureza "procura resultados que possam ser utilizados pelas pessoas para tomarem decisões práticas relativas a determinados aspetos da sua vida" (p. 293). De facto, são analisadas aulas continuadas no tempo, estabelecendo estratégias de melhoria e aperfeiçoando as práticas, aula após aula.

Em suma, o estudo que optei por realizar encontra características ténues de várias naturezas, não fazendo parte de um só tipo de investigação. Tal como referido anteriormente, as características que possui fazem-no enquadrar-se em determinado tipo de estudo com maior ou menor profundidade, não ficando portanto definida uma metodologia específica.

2.2. Participantes

Neste estudo participaram a professora estagiária, ou seja, eu, e os alunos de uma turma do 9.º ano de escolaridade de uma escola do distrito de Aveiro. Para além destes elementos e de forma mais indireta, ainda estiveram envolvidas a professora responsável pela turma (coorientadora do estudo), a orientadora do estudo e uma colega de curso que estaria a realizar um trabalho para uma outra unidade curricular. De referir que estes três elementos presenciaram as aulas dadas pela professora estagiária à turma em causa.

A minha formação passa por uma Licenciatura em Matemática (com Menor em Gestão), frequentada na Universidade de Aveiro. No ano letivo em que decorreu este estudo, estava a frequentar o Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º CEB e Secundário. Sendo a minha experiência profissional limitada, optei como objeto de estudo as minhas perguntas formuladas em contexto de dinamização de uma aula.

A seleção da referida turma foi resultado do pedido de autorização, solicitada aos encarregados de educação, da gravação vídeo e áudio de algumas aulas, sendo que apenas um elemento não entregou a mesma devidamente assinada pelo responsável. A outra turma passível de seleção não entregou, em grande parte, a referida autorização. Outro fator de seleção foi a quantidade de aula dadas a cada turma, considerando que, quanto maior fosse o número de aulas dadas maior e mais viável seria a fonte de recolha de dados.

A turma selecionada era constituída por 26 alunos, sendo 8 rapazes e 18 raparigas. A 21 de maio de 2014 a média de idades dos alunos era de 14 anos. Relativamente às classificações na disciplina de Matemática, no ano letivo em curso, tanto no 1.º como no 2.º Períodos a média da turma situou-se no nível 3, numa escala de 1 a 5.

Quando questionados acerca do gosto pela disciplina de Matemática através da pergunta "Das três disciplinas que mais gostas a Matemática está incluída?", 17 alunos responderam negativamente justificando, através de resposta aberta, essencialmente com as seguintes respostas: "prefiro outras [disciplinas]", "nunca consegui perceber muito da matéria", "nem sempre consigo perceber a matéria", "porque se tem de pensar muito" e "envolve muito raciocínio".

Os alunos participantes foram ordenados segundo um critério pré-definido, de forma a distinguir cada aluno sem o identificar. Nesse sentido, sempre que for feita referência a um aluno em específico será encontrado o símbolo “A##”, onde ## representa um número entre 1 e 26. Sempre que a distinção não seja praticável, será referenciado como “Aluno” e, por conseguinte, quando for referente a vários alunos simplesmente se dirá “Alunos”.

A referida escola engloba o 3.º Ciclo do Ensino Básico e o Ensino Secundário, sendo que, neste ciclo, a oferta formativa não se limita aos cursos gerais havendo também a possibilidade do ensino tecnológico.

2.3. Fases do estudo

O presente estudo decorreu entre setembro de 2013 e outubro de 2014 dividindo-se essencialmente em três fases. Na primeira fase identificou-se a temática a estudar e realizou-se uma revisão de literatura com a finalidade de compreender a área, com vista a suportar a fundamentação teórica, servindo como base à planificação das aulas e à construção dos instrumentos de recolha de dados. Na segunda fase procedeu-se à recolha dos dados, no caso, a implementação das planificações, o registo vídeo e áudio das aulas e a aplicação do questionário. Esta fase decorreu entre fevereiro e maio de 2014. A terceira e última fase corresponde à análise dos dados recolhidos, sendo realizadas mais leituras de forma a complementar as anteriores e ajudando à compreensão de alguns resultados obtidos. Esta fase serviu também para produzir os capítulos ainda não escritos deste trabalho. Em anexo encontra-se um quadro que sintetiza as fases do estudo acima descritas. **(2. Fases do estudo)**.

2.4. Instrumentos de recolha de dados

Neste trabalho, os dados foram recolhidos essencialmente através do registo vídeo e áudio das aulas e das notas de campo resultantes da observação direta. Para além destes registos foi ainda aplicado um questionário aos alunos. Para o registo vídeo e áudio das aulas e para a recolha das respostas dos alunos ao questionário foi pedida autorização, por escrito, aos Encarregados de Educação dos alunos em causa **(3. Autorização aos Encarregados de Educação)**.

Registo áudio e vídeo

As aulas analisadas foram registadas em suporte vídeo e áudio de forma a ter acesso aos diálogos e às discussões criadas entre mim e os alunos bem como entre os alunos durante os momentos de questionamento.

As aulas em causa foram ainda presenciadas pela orientadora do estudo, pela professora responsável da turma e por uma colega de curso. Deste modo, as transcrições que resultaram dos registos áudio foram elaboradas com a colaboração da referida colega e validadas pelas orientadoras.

Notas de campo

Segundo Máximo-Esteves (2008), o principal objetivo das notas de campo é "registar um pedaço de vida que ali ocorre, procurando estabelecer as ligações entre os elementos que interagem nesse contexto". As notas de campo, elaboradas após as aulas, decorreram da observação direta das aulas e permitiram aceder a comportamentos e situações que não ficaram registadas nos registos vídeo e áudio.

Por outro lado, aquando da identificação da problemática ainda não tinham sido tomadas as medidas necessárias para proceder aos registos. Deste modo, as notas de campo recolhidas foram, não apenas as minhas, como também as da professora responsável da turma e da colega já anteriormente referida. Estas constituíram a base para o estudo do meu questionamento quando os registos áudio e vídeo não alcançaram o pretendido.

Questionário

No âmbito da unidade curricular de Avaliação e Qualidade em Educação, que decorreu durante o segundo semestre do ano letivo decorrente, foi elaborado um questionário, com a colaboração da professora da u.c., com o objetivo de perceber quais as perceções dos alunos acerca do questionamento criado em sala de aula. O mesmo foi construído com base na literatura, seguindo essencialmente o modelo de Adedoyin (2010), no seu estudo acerca das repercussões das perguntas do professor nos alunos.

O presente inquérito por questionário está estruturado de forma tripartida de maneira a atingir distintos objetivos.

A Parte I pretende conseguir uma caracterização geral da turma selecionada, focando aspetos como o género, a idade e o local de residência. Do mesmo feito, procurou-se compreender se a disciplina de Matemática fazia parte das três disciplinas preferidas dos alunos e o porquê. A primeira parte é composta por uma pergunta fechada do tipo dicotómico, com resposta “Masculino” ou “Feminino”, sendo as restantes perguntas do tipo abertas.

A Parte II diz respeito à opinião dos alunos relativamente às perguntas formuladas pelos professores de Matemática, em geral, comtemplando assim 5 afirmações.

A terceira e última parte, Parte III, engloba 20 afirmações e visa obter o ponto de vista dos alunos da turma em causa relativamente ao questionamento criado pela professora estagiária em contexto de aula. Deste modo, procurou-se perceber qual a opinião dos alunos relativamente à frequência das perguntas (afirmações 1 a 3); indagar acerca das intencionalidades das perguntas colocadas, sob o ponto de vista dos alunos, tendo como base a categorização de perguntas selecionada para este estudo (afirmações 4 a 8); perceber se as perguntas formuladas auxiliaram os alunos a seguirem um método de resolução de problemas eficaz, sendo a sua base a metodologia de Resolução de Problemas de Ploya (afirmações 9 a 12); averiguar qual a opinião, em geral, dos alunos acerca das perguntas da professora estagiária em contexto de sala de aula (afirmações 13 à 20).

As Partes II e III são compostas por perguntas de escolha múltipla de avaliação, tal como Pardal e Correia (1995) classificam, as quais oferecem, neste caso, quatro opções de nível diferente: Discordo Totalmente (DT), Discordo (D), Concordo (C) e Concordo Totalmente (CT).

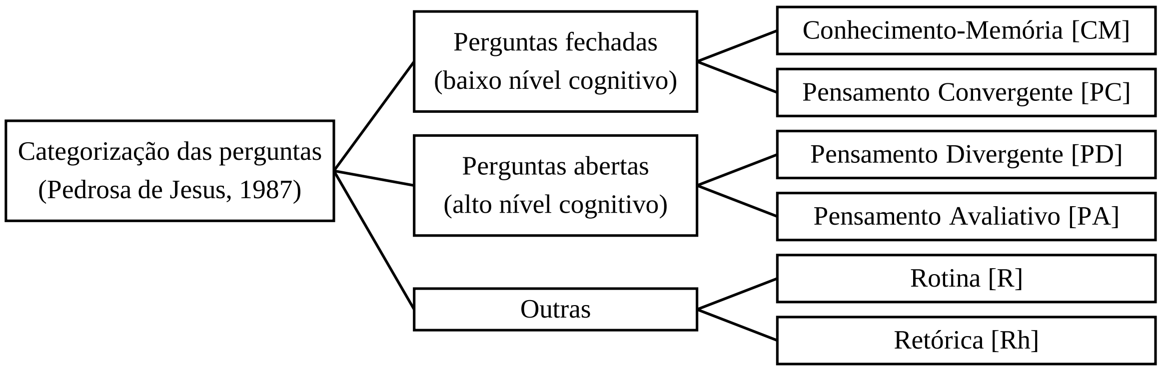
Importa ainda referir que o questionário construído foi ainda revisto por dois docentes do Ensino Superior que seguiram de perto o presente estudo: a orientadora do mesmo e a professora da u.c. para a qual foi elaborado o questionário em primeira instância. Para além disso, também a professora responsável pela turma selecionada revisou o conteúdo de forma a garantir que se enquadrava ecologicamente na turma onde seria aplicado.

O questionário encontra-se em anexo, assim como o quadro com os seus objetivos de forma sintetizada. (**4. Questionário aos alunos** e **5. Objetivos do questionário aplicado**)

2.5. Análise dos dados

Em primeira instância, foram tidas em consideração as notas de campo feitas por mim e pelas orientadoras do estágio. Daí, foram identificadas algumas falhas na minha prática docente ao nível do questionamento implementado, o que levou à criação de outras estratégias de planificação e implementação de aulas. Com isto, a planificação das aulas, nomeadamente do 2.º semestre, foram realizadas com especial atenção no questionamento que deveria ser criado em cada momento. Assim, cada planificação contempla um conjunto de perguntas a colocar, as quais foram pensadas com a professora responsável pela turma.

Relativamente à transcrição (não integral) das aulas, estas foram analisadas tendo em conta a revisão bibliográfica feita. Inicialmente, foram categorizadas todas as perguntas formuladas, justificando a sua pertinência no contexto. A categorização utilizada está de seguida sob a forma de esquema:



De seguida, todo o texto foi relido de forma a compreender se o objetivo de cada pergunta tinha sido alcançado. Este estudo teve o suporte básico da planificação das aulas. Para complementar esta análise de conteúdo, ainda foram reanalisadas as perguntas tendo em conta a sua estrutura frásica, clareza e rigor ao nível da linguagem e da perceção. Importa ainda referir que a categorização feita foi revista pelas orientadoras do estágio de forma a alcançar a categorização mais adequada para cada pergunta formulada.

Recorrendo de igual modo às transcrições, foi feita uma contabilização das perguntas formuladas, dividindo-as pelo seu nível cognitivo.

As perceções dos alunos recolhidas através da aplicação do inquérito por questionário foram trabalhadas com a ajuda do *software* SPSS, embora tenham sido analisadas essencialmente sob o ponto de vista qualitativo. Foi realizado um teste para garantir a fiabilidade das respostas dos alunos, obtendo o valor de 0,79 para o Alfa de Cronbach. Relembre-se que "O índice α estima o quão uniformemente os itens contribuem para a soma não ponderada do instrumento, variando numa escala de 0 a 1", sendo que, "De um modo geral, um instrumento ou teste é classificado como tendo fiabilidade apropriada quando o α é pelo menos 0.70" (Maroco & Garcia-Marques, 2006, p. 73). No *software* de apoio referido, a escala utilizada no questionário foi traduzida para valores numéricos: DT-1, D-2, C-3, CT-4, sendo ainda atribuído o valor 5 para a opção de sem resposta. Uma vez que lidamos com um número pequeno de respostas, selecionaram-se as tabelas de contingência de comparação simples por ser um teste não paramétrico. Importa ainda referir que foram agrupadas as opções de respostas, duas a duas, no caso, ficando reduzidas as opções de "Concordo" e "Concordo Totalmente" no grupo dos "Concordantes" e as opções de "Discordo" e "Discordo Totalmente" no grupo dos "Discordantes".

Capítulo 3 - Apresentação e análise dos dados

Neste capítulo, descrevem-se, analisam-se e interpretam-se as aulas dadas, tendo como cerne o meu questionamento em contexto de aula. Seguidamente, expõe-se o processo de planificação, a implementação e recolha de dados de cada aula individualmente, procedendo-se então à análise dos dados.

3.1. A primeira fase

Tal como já mencionado no capítulo precedente, a primeira fase, decorrida entre setembro de 2013 e janeiro de 2014, focou-se essencialmente na identificação de algumas falhas no questionamento praticado. Esta fase apresenta ainda uma estrutura tripartida no que diz respeito à evolução e às práticas didáticas aplicadas por mim.

3.1.1. Proporcionalidade Inversa (9.º ano)

A primeira fase, iniciada com um conjunto de três aulas, dizia respeito à introdução da temática da Proporcionalidade Inversa, no 9.º ano de escolaridade. Deste modo, foi elaborada uma sequência didática que pretendia "desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimento algébricos e de utilizar esses conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos" – propósito principal de ensino do tema "Álgebra", presente no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007b, p. 55). Seguindo este princípio, no final os alunos deveriam:

- ser capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;
- compreender o conceito de função de proporcionalidade inversa e ser capazes de o usar em diversas situações;

- ser capazes de interpretar formulas em contextos matemáticos e não matemáticos;
- ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.

Tendo em conta a planificação elaborada pelo Grupo de Matemática, a 10 de setembro de 2013, as aulas planificadas inserem-se no Tema 2 – Proporcionalidade Inversa, nomeadamente no tópico “proporcionalidade inversa como função”. Deste modo, os objetivos específicos pretendidos com as três aulas propostas foram:

- Analisar situações de proporcionalidade inversa como funções do tipo $y = \frac{k}{x}, k \neq 0$;
- Representar algebricamente situações de proporcionalidade inversa;
- Relacionar as representações algébrica e gráfica das funções estudadas.

A primeira aula planificada tinha como objetivo, não só a revisão de conteúdos já estudados (nomeadamente a função afim), como também a recolha de dados experimentalmente de uma situação que é modelada por uma função de proporcionalidade inversa. A tarefa em causa, de índole exploratória, envolvia a ligação com o dia-a-dia, nomeadamente com fenómenos estudados na Ciências Físico-Químicas.

Tendo em conta as minhas reflexões e as anotações das orientadoras, é possível aferir que a aula decorreu como planeado, destacando o interesse e a motivação demonstrada pelos alunos. Contudo, considerei que os alunos não captaram a finalidade da experiência realizada limitando-se a tirar conclusões factuais.

Na segunda aula, introduziu-se o tema através das deduções dos alunos quando estes completaram a atividade, dando nome e sentido às regularidades e gráfico encontrados. Para complementar a tarefa já dada, propôs-se a resolução de uma ficha de trabalho, a qual foi iniciada por uma tarefa ligada diretamente à Geometria.

Na planificação da aula, e seguindo os conselhos da professora responsável pela turma, foram previstas duas dúvidas que poderiam surgir. Uma das dúvidas previstas não foi colocada pelos mesmos, mas sim indiciada por mim. No entanto, a elucidação da mesma, embora planificada, pareceu pouco preparada, revelando alguns erros nas perguntas colocadas, tais como: “Então isto é o quê?” e “Dá o quê?”. Para além disso, a aplicação do critério de semelhança de triângulos (necessário para a elucidação da dúvida em causa) foi, numa fase inicial, inadequadamente aplicado, dificultando o desenvolvimento da restante aula.

Após a minha reflexão da aula e as notas de campo da professora responsável pela turma, foi possível perceber o baixo nível cognitivo das perguntas colocadas, assim como a existência de perguntas mal formuladas, muito genéricas ou abrangentes e que, provavelmente, foram incompreendidas pelos alunos. Na minha reflexão pós-aula pode ainda ler-se que houve “uma falha na planificação (…) que foi o facto de ter posto de lado o questionamento que deveria ter colocado” e, por conseguinte, “considero importante reformular este aspeto, introduzindo mesmo uma ou outra questão ao invés de perguntas”.

A terceira aula teve como principal objetivo a consolidação dos conteúdos estudados, recorrendo a exercícios e problemas sob o ponto de vista rotineiro.

Nos primeiros momentos da aula, senti algumas dificuldades ao desenvolver a mesma, tendo diagnosticado um fraco apropriamento do conceito de proporcionalidade inversa por parte dos alunos. No entanto, a abordagem aos exercícios e problemas propostos revelou-se mais cuidada que na aula anterior, embora as perguntas colocadas permanecessem em níveis cognitivos baixos.

No geral, os objetivos propostos para as três aulas foram alcançados, sendo que os alunos demonstraram mais dificuldade em “compreender o conceito de função de proporcionalidade inversa e ser capazes de o usar em diversas situações”, confundindo por vezes os conceitos de proporcionalidade inversa e proporcionalidade direta.

As planificações referidas podem ser consultadas em anexo (**6. Planificação 1: Proporcionalidade Inversa (9.º ano)**).

3.1.2. Aplicações do produto escalar na Geometria (11.º ano)

Depois de dadas algumas aulas ao 3.ºCEB, foi proposto a planificação de uma aula ao 11.º ano de escolaridade, em que a temática seria a aplicação do produto escalar na Geometria. A aula proposta teve como objetivo primordial a aplicação do produto escalar de vetores na caracterização de lugares geométricos no plano, nomeadamente a mediatriz de um segmento de reta, a reta tangente a uma circunferência e a circunferência com um dado diâmetro.

Uma vez que os conteúdos programáticos permitiam uma interação professor-aluno de pergunta-resposta mais equilibrada entre ambas as partes, foi desenvolvida uma planificação assente em perguntas-chave, tentando desta forma também promover um questionamento mais adequado, quando comparado com o praticado nas aulas anteriores. Assim, a aula foi estruturada com base numa apresentação de slides de forma a que os alunos pudessem conjeturar acerca dos lugares geométricos formados com a aplicação do produto escalar.

As perguntas-chave planificadas resultaram essencialmente de muitas leituras feitas sobre a temática de "como formular perguntas" e da indispensável colaboração da professora responsável pela turma.

Apesar de uma planificação distinta das anteriores, focalizada essencialmente nas perguntas e questões a formular, na prática estas nem sempre representaram o nível cognitivo que deveriam. Foram colocadas perguntas tais como "Quanto é que é o vetor AB?" quando o pretendido seria "Qual a norma do vetor AB?" e "Como se faz o ponto médio?" quando o correto é "Como se determina o ponto médio de um segmento de reta?". Estes exemplos de perguntas representam um nível cognitivo baixo, mais especificamente, tendo em conta a categorização utilizada, perguntas de Conhecimento-Memória. Com os exemplos dados pode-se constatar não apenas falhas na adequação do nível cognitivo das perguntas, como também a falta de precisão na linguagem e rigor científico. Asseverando esta afirmação, surgiram ainda perguntas como "Onde vai estar a mediatriz?" quando o pretendido seria "Qual o lugar geométrico da mediatriz do segmento de reta em causa?". Também na resolução de tarefas ocorreu o mesmo problema, como se pode verificar no exemplo que se segue: quando se acedeu à equação vetorial de uma circunferência de centro (x_0, y_0) e raio r, estando escrito no quadro a equação $(x - x_0) + (y - y_0) = r^2$, coloquei a seguinte pergunta "Este x_0 e y_0 é o quê?". A pergunta deveria ter sido formulada doutra forma, com rigor científico e sem margem para dúvidas dos alunos, por exemplo, "Tendo em conta a equação vetorial de uma circunferência, tal como temos aqui [apontando para o escrito no quadro], o que representa x_0 e y_0?".

Em suma, o objetivo proposto para a aula em causa foi alcançado e a turma, quase na sua totalidade, compreendeu os conceitos envolvidos e assimilou as aplicações do produto escalar na Geometria. O aspeto contraproducente da aula centrou-se na formulação das perguntas, as quais para além de não terem sido bem formuladas, também não foram suficientemente claras ao ponto de possibilitar os alunos a sua compreensão e respetiva resposta.

As planificações referidas podem ser consultadas em anexo (**7. Planificação 2: Aplicação do produto escalar na Geometria (11.º ano)**).

3.1.3. A resolução de problemas envolvendo equações de 2.º grau (9.º ano)

A Resolução de Problemas é uma das três capacidades transversais presente no Programa de Matemática do Ensino Básico, que assume uma importância acrescida na medida em que "é fundamental para a construção, consolidação e mobilização de conhecimentos matemáticos dos diversos temas, em conexão com o raciocínio e a comunicação." Do mesmo modo, o documento orientador defende ainda que é da responsabilidade do professor "propor problemas com diversos graus de estruturação, desde problemas assumidamente estruturados até questões abertas para investigar, bem como situações de modelação matemática." (Ponte et al., 2007b, p. 62).

Desta forma, foi planificada uma aula tendo como base problemas, com o objetivo de, não só consolidar os conteúdos programáticos relacionados com a resolução de equações de 2.º grau, como também fomentar nos alunos a utilização de um método de resolução de problemas.

Como resultado da sugestão da professora responsável pela turma, foi selecionado o modelo de resolução de problemas proposto por Polya, o qual assenta em quatro etapas (Martins, 2013):

1. Compreensão do problema: "Identificar os dados e as condições da situação; identificar os dados relevantes; clarificar termos e expressões; fazer e responder a questões sobre o problema de modo a precisar o que se pretende." (p. 6)
2. Elaboração de um plano: "Estabelecer conexões com problemas já resolvidos, identificando semelhanças e diferenças; organizar a informação relevante para a resolução de um problema; procurar e avaliar várias estratégias e selecionar a que se afigura mais adequada e eficaz." (p. 6)
3. Execução do plano: "Implementar a estratégia selecionada e tentar resolver o problema." (p. 6)
4. Avaliação: "Rever e avaliar a razoabilidade e adequação da solução ao contexto e procurar estratégias alternativas de resolver o problema." (p. 6)

De forma a planear perguntas e questões adequadas para o acompanhamento da resolução de problemas fomentada, Pereira (2002) apresenta um conjunto de interrogativas gerais e pouco específicas como forma de orientação:

1. Compreensão o problema

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Quais são as condições?

É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes ou não para determinar a incógnita? Existem condições redundantes ou contraditórias?

2. Elaboração de um plano

Já foram resolvidos problemas idênticos? Que teoremas ou fórmulas podem ajudar à resolução do problema?

Consegues exprimir o que é dito no enunciado por palavras tuas?

É possível considerar uma caso particular ou um caso mais geral que seja menos complexo? Consegues desde já resolver uma parte do problema?

O que consegues determinar a partir dos dados que tens?

3. Execução do plano

Consegues explicar e justificar cada passo que estás a realizar?

4. Avaliação

É possível obter a solução através de outro processo? Será que a solução está correta? É possível confirmar o resultado?

(pp. 11-12)

Com esta base, a aula planificada tinha como objetivos resolver equações do 2.º grau a uma incógnita e resolver e formular problemas (geométricos e algébricos) envolvendo as equações referidas.

Uma vez identificada, num dos Conselhos de Turma Intercalar, a falta de sintetização dos conteúdos por parte dos alunos da turma, em geral, a presente aula iniciou-se com uma breve síntese dos conteúdos já lecionados, nomeadamente os casos notáveis da multiplicação, a lei do anulamento do produto e a fórmula resolvente para equações de 2.º grau a uma incógnita.

No entanto, a segunda parte da aula que dizia respeito à resolução de uma tarefa com alguns exercícios e problemas, foi, desde o início mal planificada, na medida em que, embora já identificados alguns problemas na minha prática docente, nomeadamente no que diz respeito ao questionamento, este aspeto foi descuidado. A planificação foi elaborada como um roteiro, estabelecendo a ordem dos acontecimentos, não contendo assim indicações algumas acerca de possíveis perguntas ou questões a colocar ou mesmo sem prever algumas dúvidas dos alunos. Uma das perguntas formuladas foi "Quanto é 1^2?", o que mostra a fraca utilização do questionamento e sendo as perguntas de baixo nível cognitivo o meu refúgio. Outra pergunta registada foi "O que é que vocês conhecem que nos permite ajudar a resolver equações do 2.º grau?", referindo uma pergunta tão ampla que não permite aos alunos entenderem o que lhes está a ser pedido. O próprio intuito de fomentar nos alunos a utilização do método de resolução de problemas de Polya foi desconcertado, sendo que em algum momento da aula tal foi referido. Deste modo, a aula dada tornou-se muito desorganizada, sendo que a orientadora afirmou mesmo que "parecia não ter um fio condutor".

Relativamente aos objetivos estabelecidos na planificação, não houve espaço para a formulação de problemas envolvendo equações de 2.º grau a uma incógnita, o que resultou também da tarefa elaborada a qual não comtemplava este objetivo. Por conseguinte, ficou também comprometido um dos objetivos específicos da aula, não obstante os restantes terem sido alcançados.

As planificações referidas podem ser consultadas em anexo (**8. Planificação 3: A resolução de problemas envolvendo equações de 2.º grau (9.º ano)**).

3.1.4. Breve conclusão

Desde as primeiras aulas dadas que ficaram claras as minhas dificuldades em formular perguntas. Para além da utilização de perguntas de baixo nível cognitivo, estas foram mal formuladas, pondo assim em causa a compreensão dos alunos para o assunto a tratar. Assentes em perguntas muito gerais e sem orientação, as aulas dadas nem sempre atingiram os objetivos propostos, influenciando em relação direta a relação dos alunos com os conteúdos.

Embora o questionamento tenha sido melhorado aquando da aula ao 11.º ano, na aula seguinte, novamente ao 9.º ano, voltou a verificar-se falhas. Através das análises feitas, pode-se inferir que as aulas com pior desempenho são aquelas que são assentes em planificações deficientes que descuidam algum aspeto, especificamente, neste caso, o questionamento a praticar.

O próprio processo de planificação está subjacente a diversos fatores que influenciam e vão influenciar a aula que se dá. Para além disso, existem várias formas de planificar que assentam em intenções distintas, as quais condicionam todo o restante processo. Segundo Moreira (2004), é um "recurso de trabalho", cabe ao professor trazer até si "a sua capacidade de síntese, organização e contextualização, no sentido de cruzar as suas aprendizagens iniciais e profissionais, as orientações dos programas, as características do meio escolar e os contributos dos mediadores de planificação" (p.45). Deste modo, e independentemente da intenção e das opções que se tomam ao trabalhar numa planificação, "a principal intenção do professor quando planifica é a de proporcionar aos alunos a oportunidade de efetuarem aprendizagens eficazes e duradouras" (Moreira, 2004, p.47). No entanto, é bastante natural que uma aula seja planificada para determinado dia com determinadas intenções que falham caso os alunos não se demonstrem recetivos às atividades propostas (Leal, 2013). Com isto, é importante que as planificações sejam acima de tudo flexíveis, pois uma planificação demasiado rígida provavelmente cairá nos braços da imprevisibilidade naturalmente subjacente a uma aula e à turma onde será dada essa aula.

De seguida, apresenta-se um quadro que sintetiza toda a fase descrita, assim como as conclusões gerais retiradas de cada aula.

<table>
<tr><th>Fase</th><th>Data</th><th>Ano de escolaridade</th><th>Temática</th><th>Objetivos gerais</th><th>Reflexões gerais</th></tr>
<tr><td rowspan="5">1ª. Fase</td><td>16 outubro 2013</td><td rowspan="3">9.º ano</td><td rowspan="3">Proporcionalidade Inversa</td><td>Recolher dados experimentais para posterior análise.</td><td>Os alunos não captaram a finalidade da experiência realizada.</td></tr>
<tr><td>21 outubro 2013</td><td>Analisar situações de proporcionalidade inversa como funções do tipo $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$.
Representar algebricamente situações de proporcionalidade inversa.
Relacionar as representações algébrica e gráfica das funções estudadas.</td><td>Perguntas colocadas assentes em baixos níveis cognitivos e muito vagas, trazendo confusão para os alunos.</td></tr>
<tr><td>23 outubro 2013</td><td>Consolidar dos conteúdos programáticos estudados.</td><td>Abordagem aos conteúdos mais cuidada, no entanto revelando-se ainda um nível cognitivo muito baixo de perguntas formuladas.</td></tr>
<tr><td>29 novembro 2013</td><td>11.º ano</td><td>A aplicação do produto escalar na Geometria</td><td>Aplicar o produto escalar de vetores na caracterização de lugares geométricos no plano (mediatriz de um segmento de reta, reta tangente a uma circunferência e circunferência com um dado diâmetro).</td><td>Planificação mais cuidada, relevando-se esta melhoria no questionamento praticado. No entanto, falta de rigor científico na oralidade e formulação de perguntas muito vagas.</td></tr>
<tr><td>2 dezembro 2013</td><td>9.º ano</td><td>A resolução de problemas envolvendo equações de 2.º grau</td><td>Resolver equações do 2.º grau a uma incógnita.
Resolver e formular problemas (geométricos e algébricos) envolvendo equações do 2.º grau.</td><td>Planificação defeituosa, trazendo consequências diretas para a prática durante a aula, nomeadamente o questionamento de baixo nível cognitivo e o descuido com os objetivos estabelecidos para a aula.</td></tr>
</table>

Quadro 10. Quadro sintetizante da primeira fase

3.2. A segunda fase

De forma a colmatar os pontos menos positivos identificados na primeira fase deste estudo, procedeu-se a leituras que aludem ao processo de planificação e ao questionamento em contexto de sala de aula. Com uma incidência menor, e uma vez que não é o objeto de estudo deste trabalho, as leituras acerca da temática da planificação de aulas foram feitas de forma mais flutuante ao passo que o estudo acerca do questionamento resultou num dos capítulos teóricos deste estudo.

Para avaliar a idoneidade didática, mais especificamente, ao nível da interação professor-aluno, sentiu-se a necessidade de seguir um modelo de análise resultando igualmente num capítulo teórico. Desde modo, no que diz respeito à idoneidade interacional, e uma vez que está diretamente ligada ao objeto deste estudo, vou analisar as suas diversas componentes de forma individual. Considerou-se, ainda, não existirem elementos suficientes para aferir acerca da idoneidade afetiva uma vez que as minhas intervenções na turma alvo ocorreram em número reduzido. Por outro lado, considerou-se que, dentro do possível, o processo de planificação e seleção de tarefas procurou ir ao encontro de tarefas de interesse para os alunos e de situações que permitiram compreender a utilidade da matemática na vida quotidiana e profissional. Relativamente à idoneidade mediacional pouco se pode concluir uma vez que as componentes relativas ao número de alunos, horário, condições de aula e tempo de aprendizagem não são manuseadas pela minha pessoa, devido à minha posição e função na escola. No que concerne aos recursos materiais utilizados, sempre estiveram de acordo com as necessidades de cada aula, não havendo aspetos relevantes a apontar.

Importa ainda referir que a categorização de perguntas utilizada para a análise das aulas seguintes foi a proposta por Pedrosa de Jesus (1987).

Relativamente às tarefas a adotar quando se planifica, devem ser contempladas as seguintes características, adaptadas de Moreira (2004):

- Apresentem os conteúdos de forma a tornarem-se significativos e funcionais para os alunos;
- Sejam adequadas ao nível de desenvolvimento dos alunos;
- Sejam desafiantes para os alunos, ou seja, que tenham em conta as suas competências atuais e que as possam desenvolver através das necessárias ajudas;

- Provoquem conflitos cognitivos e estimulem a atividade mental do aluno, o que facilitará e permitirá o estabelecimento de conexões entre os prévios e novos conhecimentos;
- Fomentem uma atitude favorável, motivando os alunos para as novas aprendizagens;
- Estimulem a autoestima e o autoconceito dos alunos como facilitadores da capacidade de argumentação;
- Ajudem os alunos a desenvolver competências de aprender a aprender, tornando-os mais autónomos e progressivamente intelectualmente independentes.

  (p. 50)

As próprias planificações sofreram alterações, sendo estruturadas em forma de quadro, por objetivos e perguntas-chave a colocar. Com este tipo de organização torna-se mais fácil identificar os objetivos alcançados e estabelecer uma comparação entre as perguntas planificadas e as colocadas em contexto de sala de aula.

Tal como já referido no capítulo anterior, apenas foi conseguida a autorização para a gravação áudio e vídeo das aulas dos encarregados de educação dos alunos da turma do 9.º ano. Deste modo, a aula dada ao 11.º ano sofrerá uma análise menos rica quando comparada com as análises feitas às aulas dadas ao 9.º ano.

3.2.1. Preparação para o Teste Intermédio (9.º ano)

O Teste Intermédio do 9.º ano, proposto pelo Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação e Ciência, é um instrumento de avaliação de índole opcional para as escolas e agrupamentos. Tal como enunciado na plataforma online, este instrumento de avaliação tem

> “como principais finalidades permitir a cada professor aferir o desempenho dos seus alunos por referência a padrões de âmbito nacional, ajudar os alunos a uma melhor consciencialização da progressão da sua aprendizagem e,

> complementarmente, contribuir para a sua progressiva familiarização com instrumentos de avaliação externa.” (Ministério da Educação e Ciência, 2014)

Após a escola onde realizei o estágio ter formalizado a sua inscrição para o Teste Intermédio do 9.º ano de escolaridade, foi decidido, em conjunto com a professora responsável pela turma, a preparação de algumas tarefas como forma de revisão de conteúdos temáticos. As tarefas selecionadas foram todas extraídas de testes intermédios de anos letivos anteriores. Importa ainda referir que a abordagem das tarefas foi pensada em conjunto com a professora responsável pela turma, assim como a sua sequência, tendo em conta que, pela própria natureza da aula, poderiam surgir dúvidas e esclarecimentos não contemplados nas planificações.

De seguida, apresenta-se a planificação e a implementação das duas aulas dadas, dividindo por tarefa (e alínea da tarefa em causa) por forma a estabelecer um paralelismo e as respetivas conclusões mais pormenorizadas de cada momento implementado. É de mencionar que aparecerão de seguida excertos das planificações bem como os fragmentos que lhes correspondem das transcrições. Para aceder à planificação completa e à transcrição basta recorrer aos anexos (**9. Planificação 4: Revisões para o Teste Intermédio (9.º ano), 10. Transcrição da aula do dia 10 de março, 11. Transcrição da aula do dia 12 de março**).

Relativamente à introdução da Tarefa 8 do Teste Intermédio de 2012 temos o seguinte:

Tarefa 8.

8. Na Figura 4, estão representados um retângulo $[ABCD]$ e uma circunferência de centro no ponto O e raio r

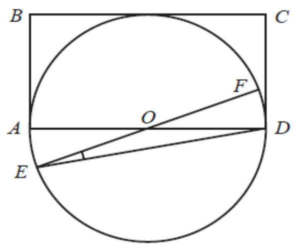


Figura 4

Sabe-se que:

- o ponto E pertence à circunferência e é exterior ao retângulo $[ABCD]$
- $[AD]$ e $[EF]$ são diâmetros da circunferência
- o lado $[BC]$ do retângulo é tangente à circunferência
- $D\hat{E}F = 10^{\circ}$

A tarefa foi proposta como trabalho de casa.

(1)	Qual é a informação fornecida? **[PC]**	Pretende-se que os alunos analisem a figura em causa (Figura 4) e estabeleçam relações entre as medidas do retângulo e as medidas da circunferência, isto é, $\overline{AB} = \overline{CD} = r$ ou $\overline{AD} = \overline{EF} = 2r$, sendo r o raio da circunferência considerada.

1 ***Professora****: Quais é que são os dados do problema que vocês têm e que nos permite desde já tirar conclusões?* ***[PC]*** *Ainda mesmo antes de ler o enunciado…*
2 [Pretende-se alcançar o objetivo em (1)]
3 ***A13****: Que A e D são diâmetros e são iguais.*
4 ***Professora****: A e D ou o diâmetro é AD?* ***[Rh]***
5 ***A13****: AD, que é o diâmetro, e EF são iguais.*
6 [É escrito no quadro que $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{EF}}$, explicitando a notação usada relativamente à indicação correta de retas, segmentos de reta e comprimento de um segmento de reta.]
7 [Nesta altura, alunos dispersam pela análise da figura focando-se nos ângulos presentes por vez da relação entre as medidas, havendo assim, a certa altura, a necessidade de redirecionar para o objetivo pretendido]
8 ***Professora****: Então mas estamos só a analisar a circunferência. E o que sabemos acerca das medidas do retângulo?* ***[PC]*** *Podemos saber alguma coisa?* ***[PC]***
9 **A20**: [impercetível]
10 ***Professora****: Já sabemos que o segmento AD é um diâmetro da circunferência e que é também o quê em relação ao retângulo?* ***[PC]***
11 ***A21****: O CD e AB têm de ser metade! Porque é o raio.*
12 ***Professora****: Volta-me a dizer o que acabaste de concluir para eu escrever no quadro.* ***[R]***
13 ***A21****: CD é igual a AB que é igual a …pois… as medidas… isso é as medidas…*
14 ***Professora****: Quero relações entre as medidas que estão na figura, sem valores numéricos.* ***[R]***
15 [Pretende-se reforçar que o que está em causa é obter a relação entre as medidas da figura que contempla duas figuras relacionadas no que diz respeito às suas medidas, mas que não implica valores numéricos]
16 ***A21****: …que é igual ao raio!?*
17 ***Professora****: E o raio, consegues traduzir por alguns segmentos?* ***[C-M]***
18 [Pretende-se que o aluno conclua que o raio da circunferência é a largura do retângulo]

19 **A21**: OD, AO, OE, …
20 ***A17**: A tangente… faz um ângulo de* $90°$… [impercetível*] é perpendicular a* BC [impercetível]. *Logo a largura [do retângulo] vai ser o raio [da circunferência].*
21 ***Professora**: Exatamente! Logo a largura do retângulo vai ser metade do comprimento. Então como é que posso escrever?* ***[C-M]***
22 [Pretende-se que os alunos identifiquem na figura os segmentos que estão a ser considerados]
23 ***A13**: É metade de* AD *e de* BC*!*

Com este excerto podemos aferir que os alunos não compreenderam de imediato e numa fase inicial, quais os dados a retirar da tarefa, havendo assim a necessidade de os orientar para o objetivo estabelecido. É de referir também que embora a pergunta inicial colocada tenha ido ao encontro da pergunta planificada, foi necessário acrescentar mais perguntas de orientação para a tarefa.

Após concluir sobre a relação existente entre as medidas do retângulo e as medidas da circunferência, deu-se início à resolução das alíneas:

<table>
<tr><td colspan="3">8.1. Admite que o perímetro do retângulo $[ABCD]$ é igual a $30\,\mathrm{cm}$

Determina o comprimento da circunferência.
Apresenta o resultado em centímetros, arredondado às décimas.
Mostra como chegaste à tua resposta.
Nota – Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>O que é pedido no enunciado? [C-M]</td><td>Pretende-se que os alunos concluam que o comprimento da circunferência é o perímetro da mesma.</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>O que necessitamos de conhecer para determinar o pedido? [PC]</td><td>Pretende-se que os alunos identifiquem que falta conhecer o valor do raio da circunferência para conseguirem determinar o seu perímetro.</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td>Como podemos determinar o raio da circunferência com os dados que temos? [PC]</td><td>Pretende-se que os alunos concluam que, como o perímetro do retângulo é 30 cm basta encontrar uma das dimensões do retângulo, por exemplo a largura, para concluir acerca do raio da circunferência.
$$P_{\square[ABCD]} = 2 \times \overline{AD} + 2 \times \overline{AB} = 30$$
$$2 \times 2r + 2 \times r = 30 \Leftrightarrow 6r = 30 \Leftrightarrow r = 5$$</td></tr>
<tr><td>(5)</td><td>Sabendo agora o raio da circunferência, o que fazemos de seguida? [PC]</td><td>Pretende-se que os alunos compreendam que determinar o raio não é o pedido mas sim determinar o comprimento da circunferência, tarefa que se torna simplificada com o conhecimento do valor do raio da mesma.
$$P_{\bigcirc} = 2 \times \pi \times r = 10\pi \cong 31{,}4$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resposta: O comprimento da circunferência é de 31,4 cm.</td></tr>
</table>

1 ***Professora**: Dão-nos o perímetro do retângulo e querem saber o comprimento da circunferência. O que quer dizer determinar o comprimento da circunferência? **[C-M]** O que é que eles pedem? **[C-M]***

2 [Pretende-se alcançar o objetivo em (2)]

3 ***A17**: Eu acho que é o perímetro.*

4 ***Professora**: Qual é que é a expressão do perímetro da circunferência? **[C-M]***

5 ***A10**:* $2 \cdot \pi \cdot r$

6 ***Professora**: O que precisamos de encontrar? **[PC]** Temos tudo para determinar o perímetro? **[PC]***

7 [Pretende-se alcançar o objetivo em (3)]

8 ***A14**: Falta-nos raio, que é metade do comprimento* [impercetível].

9 ***Professora**: Como podemos encontrar o raio então? **[PC]***

10 [Pretende-se alcançar o objetivo em (4)]

11 ***A21**: Pelo perímetro do retângulo! A largura é o diâmetro, né? E a altura é o raio.*

12 ***A13**: Então se descobrirmos a altura, ou a largura, vamos saber o raio, que é o que nós precisamos.*

13 ***Professora**: Exatamente, então e como é que podemos determinar? **[PD]***

14 [Pretende-se que os alunos façam a integração de toda a informação fornecida tal como no objetivo (4)]

15 [Muitos alunos discutem estratégias em voz alta sem ficar algo explícito, havendo assim a necessidade de sintetizar o que já foi dito]

16 ***Professora**: Então o que é que sabemos? **[PC]***

17 ***Professora**: Como é que dado o perímetro desta figura* [apontando para o quadro onde estaria desenhado um retângulo]*? **[C-M]***

18 ***A18**: É tudo!*

19 ***A17**: É somar todos os lados.*

20 [Escrita no quadro do perímetro da figura, ficando algo idêntico a $2\mathrm{r} + 2\mathrm{r} + 2\mathrm{r} = 30$]

21 ***Professora**: Então e quanto dá* $2r + 2r + 2r$*? **[Rh]***

22 ***A17**:* $6r$*!*

23 ***Professora**: Já sabemos o raio. E agora? **[PC]** Já está resolvido? **[PC]***

24 [Pretende-se que os alunos compreendam que determinar o raio não é o pedido mas sim determinar o comprimento da circunferência, tarefa que se torna simplificada com o conhecimento do valor do raio da mesma]

25 ***A9**: Agora é só substituir na fórmula.*

26 ***Professora**: Qual fórmula? **[PC]***

27 [Pretende-se alcançar o objetivo em (5)]

28 ***A14**: Do perímetro do círculo!*

29 ***A13**:* $2 \cdot \pi \cdot r$

30 [Resolução da etapa, isto é, $\mathrm{P} = 2 \times \pi \times 5 \cong 31{,}42$]

31 ***Professora**: Era isto que pedia? **[R]***

32 ***Alunos**: Sim.*

Na resolução conjunta da alínea 1 da tarefa em causa, é possível verificar que as perguntas implementadas seguiram o mesmo nível cognitivo que as perguntas planificadas, podendo assim concluir-se que passou a existir um cuidado especial da minha parte para formular perguntas com níveis cognitivos adequados aos diversos momentos criados em sala de aula. Em contrapartida, por duas vezes (linhas 6 e 9) utilizei o termo “encontrar” em vez de “determinar”, relevando ainda algumas falhas na formulação das perguntas sob o ponto de vista matemático.

Relativamente à segunda alínea da tarefa, existem dois processos de resolução que são aceites segundo os critérios do GAVE, pelo que foram contemplados na planificação, sendo, deste modo, passíveis de implementar durante a aula.

8.2. Determina a amplitude de uma rotação de centro em O que transforme o ponto F no ponto A Mostra como chegaste à tua resposta.		
(6)	O que é pedido no enunciado? **[R]**	Pretende-se que os alunos afirmem que é necessário encontrar o ângulo de rotação que transforma o ponto F no ponto A, isto é, o ângulo $F\hat{O}A$.
(7)	**Recordar…**	**Rotação** É uma isometria e, para a descrever, é necessário conhecer: • o centro de rotação • a amplitude do ângulo de rotação • o sentido do ângulo de rotação
(8)	Como podemos determinar esse ângulo ($F\hat{O}A$) com os dados fornecidos? **[PC]**	Pretende-se que os alunos refiram que é conhecido o valor do ângulo $D\hat{E}F$, no caso, 10°, tomando, a partir daqui, dois possíveis métodos de resolução, segundo os critérios específicos de correção do Teste Intermédio.
(9)	Como podemos confirmar o resultado? **[PD]** Existe outra forma de descobrir o ângulo? **[PD]**	Pretende-se que os alunos considerem uma nova perspetiva para determinar o pedido, desde que correta.
1.º Processo de resolução		$\widehat{FD} = 2D\hat{E}F = 20°$ $F\hat{O}A = 180° - 20° = 160°$
2.º Processo de resolução		$A\hat{D}E = 10°$, pois o triângulo $[EOD]$ é isósceles $E\hat{O}D = 180° - (10° + 10°) = 160°$ $F\hat{O}A = E\hat{O}D = 160°$ pois os ângulos são verticalmente opostos
Resposta: A amplitude é de 160º.		

1 ***Professora**: Vamos agora determinar a amplitude de uma rotação, neste caso, de centro em O e que transforma o ponto F no ponto A. Primeiro que tudo, o que é uma rotação?* ***[C-M]***
2 [Pretende-se assim alcançar o objetivo em (7)]
3 ***A13**: É uma transformação que nós aplicamos num objeto, ou numa letra, e transformamos noutra!*
4 ***Professora**: É uma isometria. Lembram-se?* ***[Rh]*** *E o que precisamos para definir uma rotação?* ***[C-M]***
5 ***A17**: De um centro.*
6 ***A13**: Temos que ter um centro, que é o centro de rotação… e temos que saber quanto é que vamos rodar…*
7 ***Professora**: Então, talvez seja melhor escreverem no vosso caderno isto que estamos a dizer.* [Escrita no quadro das informações necessárias para descrever uma rotação, propondo aos alunos que revejam, em casa, as restantes isometrias] *Falta ainda uma coisa muito importante que é o sentido da rotação!*
8 [Elucidação dos sentidos positivo e negativo da rotação, baseado num esquema feito no quadro]
9 ***Professora**: Alguma dúvida em relação às rotações?* ***[R]*** *Ficou percebido?* ***[R]***
10 ***Professora**: Então como é que vocês chegaram lá?* ***[PA]***

11 [Uma vez que a tarefa já tinha sido proposta para trabalho de casa e os valores encontrados do ângulo pedido eram distintos de aluno para aluno, pretende-se que os alunos justifiquem o seu método de resolução. Note-se que existem dois processos distintos considerados válidos para a resolução deste exercício e que levam igualmente a dois valores distintos para a amplitude pedida, dependendo do sentido que for considerado]

12 ***Professora****: O que é que temos?* ***[PC]*** *Já chegámos à conclusão que eles querem transformar o ponto F no ponto A. Então, o que é que nós temos que nos permite calcular a amplitude dessa rotação?* ***[PC]***

13 [Pretende-se alcançar o objetivo em (8)]

14 ***A21****: ODE! Que é* 10 *graus!*

15 ***A18****:* [impercetível] *… ângulo raso…*

16 ***Professora****: Qual é que é o ângulo raso?* ***[C-M]***

17 [Pretende-se que o aluno identifique corretamente o ângulo raso na figura e que este seja conveniente para a resolução da tarefa]

18 ***A21****: O arco AOD é* 180 *graus.*

19 ***Professora****: Mais?* ***[PC]***

20 ***A20****:* [impercetível] *é um ângulo inscrito...*

21 [Sentiu-se a necessidade de voltar atrás e orientar a resolução uma vez que os alunos voltaram a dispersar com a informação fornecida]

22 ***Professora****: Nós queremos a amplitude da rotação que transforme o ponto F no ponto A… mas o que é que isso quer dizer?* ***[PC]*** *Do que andamos à procura exatamente?* ***[PC]***

23 ***A13****: Da rotação!*

24 ***Professora****: Sim, mas a rotação é definida por três coisas…* ***[C-M]***

25 ***A13****: Da amplitude do ângulo que vamos…*

26 ***Professora****: De qual ângulo?* ***[PC]***

27 ***Alunos****: Do ângulo FOA!*

28 ***Professora****: Já estamos perto do pedido ou não?* ***[PC]***

29 [Pretende-se que os alunos compreendam que, ao determinar a amplitude do ângulo $F\hat{O}A$ chegam ao pedido, isto é, a amplitude da rotação de centro O que transforma o ponto F no ponto A]

30 ***Alunos****: Já encontrámos!!*

31 ***A13****: Também há outra maneira!*

32 ***Professora****: Sim, já lá vamos. Qual é que seria a resposta?* ***[R]***

33 ***Alunos****: A amplitude da rotação que transforma… o ponto F no ponto A é…*

34 ***A9****:* 160.

35 ***A17****: Professora, e se tivéssemos feito…*

36 ***Professora****: Sim, já vamos ver. De facto, existem outras estratégias para encontrar o ângulo, não existem?* ***[PD]***

37 ***A13****: Sim!*

38 ***Professora****: Queres dizer como fizeste?* [pergunta dirigida ao aluno A13 uma vez que este se mostrou disponível para explicar o seu raciocínio (distinto do realizado em comum com a turma)]

39 [O aluno explica o seu raciocínio enquanto a professora estagiária vai escrevendo no quadro de modo a toda a turma acompanhar a resolução alternativa]

40 ***Professora****: Resposta: A amplitude … é…* ***[R]***

41 ***A13****:* -200 *graus.*

De imediato podemos constatar que a pergunta inicial ("O que é pedido no enunciado?"), devendo ser colocada no começo de cada resolução de uma tarefa, não foi formulada embora tenha sido planificada. No entanto, foi feita uma breve revisão sobre rotações (através de uma pergunta C-M) o que permitiu aos alunos terem tempo de compreender o que era pedido na tarefa. De igual forma, não foi colocada a pergunta que permitia aos alunos encontrar uma estratégia de confirmação do resultado uma vez que estes, por si só, encontraram as duas estratégias de resolução, contrariando a necessidade de os incentivar a tal.

Na linha 19 podemos ainda encontrar uma pergunta (“Mais?”) que, embora no contexto, categorizada como PC, é uma pergunta que pode trazer dúvidas e confusão aos alunos, levando a que estes não respondam ao pretendido.

Relativamente ao nível cognitivo das perguntas formuladas, apenas podemos estabelecer uma comparação com a pergunta formulada para alcançar o objetivo em (8), concluindo que as perguntas formuladas estiveram de acordo com a planificação.

Para a terceira (e última) alínea da tarefa 8 não foi planificada uma abordagem em específico uma vez que se tratava de uma pergunta de escolha múltipla. Esta pergunta apenas exigia uma visualização da figura e o conhecimento do termo “mediatriz” de um segmento de reta. Deste modo, não aparecerá nesta análise.

Relativamente à Tarefa 6 do TI 2012, temos:

Tarefa 6.

6. Na Figura 2, estão representadas, num referencial cartesiano, as retas r e s

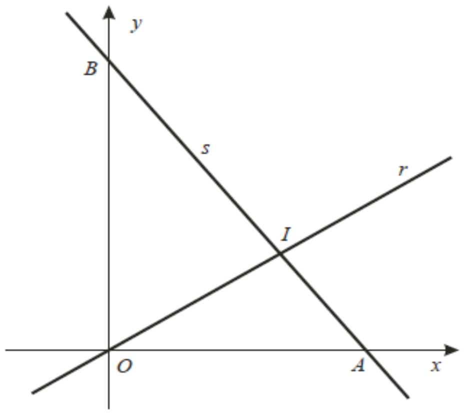


Figura 2

Sabe-se que:

- a reta r é definida por $y = 0{,}6x$
- a reta s é definida por $y = -1{,}2x + 4{,}5$
- o ponto A é o ponto de intersecção da reta s com o eixo das abcissas
- o ponto B é o ponto de intersecção da reta s com o eixo das ordenadas
- o ponto I é o ponto de intersecção das retas r e s

1 ***Professora****: Então vamos ver o que temos… já leram?* **[R]**
2 ***Alunos****: Não!*
3 ***Professora****: Então temos: [*leitura do enunciado, escrevendo no quadro os dados da tarefa*]*
4 ***A13****: Podemos já dizer qual é o tipo de função…*
5 ***Professora****: Podemos então dizer já que tipo de funções é que são, então quais é que são?* **[C-M]**
6 ***A17****: A primeira é uma função linear.*
7 ***Professora****: E a segunda?* **[C-M]**
8 ***Alunos****: É uma função afim!*
9 [Proposta de revisão de conteúdos: tipos de funções já conhecidas, no caso, função afim, função linear, função de proporcionalidade inversa e função quadrática.]

A abordagem à tarefa não se iniciou com a leitura do enunciado, facto que poderia ter sido problemático para o desenvolvimento da restante tarefa. Embora tenha surgido como trabalho de casa, é sempre importante ler os enunciados para contextualizar e ajudar os alunos na identificação da tarefa que se vai resolver.

Também linha 7 surge uma pergunta que pode tornar confusa a restante resolução da tarefa. No seguimento da denominação que o aluno atribuiu às funções, continuei com a atribuição de “primeira” e “segunda” às funções a tratar. Nesta situação, de imediato deveria ter corrigido o aluno e referir-me à função/reta s e à função/reta r.

O nível cognitivo das perguntas começa a mostrar evidência de não ser tão desadequado aos momentos de aula, no entanto a própria formulação das mesmas não assenta no rigor científico necessário para não trazer dúvidas aos alunos acerca do assunto que se está a tratar.

Uma vez que a revisão planificada dos conteúdos já teria sido feita na introdução da tarefa, a resposta à primeira alínea tornar-se-ia facilmente identificada. Segue-se então a planificação e o decorrer deste momento:

<table>
<tr><td colspan="3">6.1. Qual é a ordenada do ponto B ?</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(10)</td><td>Como se pode facilmente identificar a ordenada do ponto B? [C-M]</td><td rowspan="3">Pretende-se que os alunos percebam que o ponto B pertence à reta s e que, por sua vez, o ponto B é a interseção da reta s com o eixo das ordenadas, logo, a ordenada do ponto B é facilmente percetível na equação da reta traduzindo-se pela ordenada na origem.

Isto é, s: $y = -1{,}2x + 4{,}5$ logo a ordenada do ponto B é 4,5.</td></tr>
<tr><td>Qual é a abcissa do ponto B? [PC]</td></tr>
<tr><td>A reta s é definida por $y = -1{,}2x + 4{,}5$ que é uma função do tipo $y = mx + b$. Que significado tem o parâmetro b graficamente? [C-M]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recordar…</td><td>Função afim

O gráfico de uma função do tipo $y = mx + b$ tem a configuração de uma reta. O parâmetro m chama-se o declive da reta e o parâmetro b é a ordenada na origem.

• $m > 0$, a reta tem declive positivo
• $m < 0$, a reta tem declive negativo
• $m = 0$, o declive é nulo e a função diz-se constante

Função linear

Quando $b = 0$, a expressão fica $y = mx$, denominando-se por função linear ou função de proporcionalidade direta.

Efetivamente, duas variáveis, x e y, dizem-se diretamente proporcionais se o quociente entre elas é constante e diferente de zero.

$k = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = kx \, , k \neq 0$</td></tr>
</table>

(11)	Existe outra forma de descobrirmos a ordenada do ponto B? **[PD]** Como? **[PD]**	Pretende-se que os alunos encontrem outra direção para a resolução da tarefa, como, por exemplo, sabendo que a abcissa do ponto B é nula, basta substituir esta informação na equação da reta s.
Resposta: A ordenada do ponto B é 4,5.		

1 ***Professora***: [Leitura do enunciado] *Qual é a resposta imediata que vocês dão?* ***[PC]***
2 [Pretende-se alcançar o objetivo em (10)]
3 ***A18***: 4,5*!*
4 ***Professora***: *Porquê?* ***[PA]***
5 ***A23***: [impercetível, no entanto a professora estagiária percebeu e direcionou a pergunta]
6 ***Professora***: *Substituir por zero o quê?* ***[PC]***
7 [Pretende-se que os alunos sejam mais claros a sugerir as estratégias de modo a evitar erros, por exemplo, na identificação da reta ou da coordenada a substituir]
8 ***A23***: *O* x.
9 ***Professora***: *Onde?* ***[PC]***
10 ***Professora***: *Em qual reta, diz lá.* ***[R]***
11 ***A23***: *Na* s.
12 [Realização da substituição proposta pelo aluno, ficando no quadro a resolução da etapa: $y = -1{,}2 \times 0 + 4{,}5 = 4{,}5$]
13 ***Professora***: *Então mas escusávamos de fazer isto. O que é que vimos em relação ao parâmetro b [na equação da reta de uma função afim]?* ***[C-M]***
14 [Pretende-se que os alunos façam a associação como descrito em (10)]
15 ***A13***: *É a ordenada na origem!*
16 ***Professora***: *Então se temos uma função deste tipo, que é uma função quê?* ***[C-M]***
17 ***A13***: *Função afim!*
18 ***Professora***: *Então o que podemos logo concluir sem fazer a substituição?* ***[PC]***
19 ***Professora***: *Vocês olham para a expressão da função, olhando para o gráfico vocês vêm que o ponto B interseta o eixo dos…?* ***[R]***
20 ***A13***: yy
21 ***Professora***: *Dos* yy, *então significa que, olhando para aqui, imediatamente se vê que…?* ***[C-M]***
22 ***Aluno***: *O b é* 4,5*!*
23 ***Professora***: *Que o b é* 4,5, *pois este é o parâmetro que nos indica qual a ordenada onde a reta vai intersetar o eixo dos* yy.

Para atingir o objetivo delineado em (10), foram planificadas três perguntas-chave, sendo que nenhuma foi colocada visto que um dos alunos respondeu de imediato à pergunta presente no enunciado. No entanto, foi pedido ao aluno para justificar a sua resposta, levando a resolução da tarefa para como descrito em (11). Deste modo, não se poderá fazer um paralelismo acerca do nível cognitivo das perguntas planificadas com o nível cognitivo das perguntas formuladas em contexto de aula. No entanto, é possível afirmar que as mesmas se situaram, sobretudo, nos dois níveis de cognitivo mais baixo da categorização utilizada neste trabalho.

É evidente, de novo, a formulação incorreta de perguntas, sendo os casos mais flagrantes o que aparece na linha 9, onde a pergunta é "Onde?" e deveria ser, por exemplo, “Em que função?”, e na linha 16, que um exemplo de uma pergunta mais correta seria “Como se denominam as funções deste tipo?”. Para além disso, nas linhas 19 e 21, a pergunta foi colocada dando já parte da resposta, fazendo com que o nível cognitivo das mesmas baixasse significativamente.

Para a alínea seguinte, embora de resposta fechada, envolvia a análise e integração da informação dada, procedendo-se então, da seguinte forma:

<table>
<tr><td colspan="3">6.2. Qual é a medida do comprimento do segmento de reta $[OA]$?

Transcreve a letra da opção correta.

(A) 3,5
(B) 3,75
(C) 4,5
(D) 4,75</td></tr>
<tr><td rowspan="4">(12)</td><td>O que precisamos de saber para descobrir o comprimento do segmento de reta $[OA]$? [PC]</td><td rowspan="4">Pretende-se que os alunos, ao analisar a representação gráfica, percebam que basta encontrar a abcissa do ponto A uma vez que o ponto O é a origem do referencial.

Substituindo na expressão que define a reta s, x por 0 obtemos:
$0 = -1{,}2x + 4{,}5$
$\Leftrightarrow 1{,}2x = 4{,}5$
$\Leftrightarrow x = \frac{4{,}5}{1{,}2} = 3{,}75$</td></tr>
<tr><td>Como podemos encontrar a abcissa do ponto A? [PC]</td></tr>
<tr><td>A qual das retas pertence o ponto A? [PC]</td></tr>
<tr><td>Qual é a ordenada do ponto A? [PC]</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resposta: B</td></tr>
</table>

1 ***Professora**: Então, como é que podemos encontrar o comprimento do segmento* $[AO]$*?* ***[PC]***
2 [Pretende-se alcançar o objetivo em (12)]
3 ***A21**: O A!*
4 ***Professora**: O ponto A?* ***[R]***
5 ***A9**: Sim…*
6 ***A21**: O ponto* O *é a origem!*
7 ***Professora**: Então, queremos as coordenadas do ponto A. Qual é a ordenada e qual é a abcissa?* ***[PC]***
8 ***A21**: Um é zero!*
9 ***Professora**: Qual deles?* ***[PC]***
10 ***A13**: A ordenada é zero.*
11 […]
12 ***Professora**: Então afinal o que é que nós queremos determinar?* ***[R]***
13 ***A17**: O A!*

14 ***A13****: A abcissa do ponto A.*
15 […]
16 ***A13****: Substituir na expressão…*
17 ***Professora****: Em qual expressão?* ***[R]***
18 ***A13****: Na função afim, que era a função s.*
19 ***Professora****: E porque é que fazemos isto?* ***[PC]*** *Voltem-me a explicar.*
20 ***A13****: Porque sabemos que a ordenada é zero.*
21 ***Professora****: E agora o que é que eu faço?* ***[PC]*** *Já está resolvido o problema?* ***[R]***
22 ***A10****: Já!*
23 ***Professora****: Porquê?* ***[PA]***
24 ***A13****: Já sabemos a abcissa do ponto A e …* [impercetível].
25 ***Professora****: Então, neste caso, a resposta é a…?* ***[R]***
26 ***A13****: É a B!*

No desenvolvimento da tarefa, as perguntas formuladas seguiram a planificação, inclusive no que diz respeito ao nível cognitivo das mesmas. Apenas a terceira pergunta planificada (*A qual das retas pertence o ponto A?* [PC]) sofreu uma descida de nível cognitivo aquando da resolução da tarefa devido ao seu próprio desenvolvimento, relevando-se na pergunta “Em qual expressão?” (linha 17).

Na linha 9, volta-se a denotar a dificuldade em formular perguntas que sejam explícitas para os alunos e que não sejam propícias a dúvidas. Neste caso, em específico, deveria ter-me referido à abcissa e ordenada e um ponto por vez de utilizar a expressão “Qual deles?”.

Para proceder à análise da última alínea da tarefa 6, surgem os seguintes dados:

<table>
<tr><td colspan="3">6.3. Determina as coordenadas do ponto I

Mostra como chegaste à tua resposta.</td></tr>
<tr><td>(13)</td><td>Como podemos encontrar as coordenadas do ponto I? [PC]</td><td>Pretende-se que os alunos compreendam que o ponto I é o ponto de interseção das retas r e s. Logo, basta resolver um sistema de equações para encontrar as suas coordenadas.

$$\begin{cases} y = 0{,}6x \\ y = -1{,}2x + 4{,}5 \end{cases}$$
$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 0{,}6x = -1{,}2x + 4{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 0{,}6x + 1{,}2x = 4{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 1{,}8x = 4{,}5 \end{cases}$</td></tr>
</table>

		$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0{,}6 \times 2{,}5 \\ x = 2{,}5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1{,}5 \\ x = 2{,}5 \end{cases}$
(14)	Como podemos confirmar o resultado? **[PD]**	Pretende-se que os alunos encontrem uma estratégia que lhes permita confirmar o resultado obtido. Por exemplo, substituir as coordenadas encontradas numa das equações das retas obtendo uma proposição verdadeira.
Resposta: $I\ (2{,}5;\ 1{,}5)$		

1 ***Professora**: Quero que pensem, como é que podemos encontrar as coordenadas do ponto I? **[PC]***
2 [Pretende-se alcançar o objetivo em (13)]
3 [É dado algum tempo dado aos alunos para refletirem sobre a tarefa]
4 ***Professora**: Então como é que podemos então encontrar o ponto I? **[PC]***
5 ***Alunos**: Igualar!*
6 ***Professora**: Mas igualar o quê? **[PC]***
7 ***A9**: As condições…*
8 ***Professora**: Quais condições? **[R]** Funções? **[R]***
9 ***A14**: A função s [impercetível]*
10 ***A9**: $-1{,}2x + 4{,}5 = 0{,}6x$*
11 ***Professora**: Muito bem!*
12 [Resolução da equação e conclusão da tarefa]

O desenvolvimento da tarefa vem confirmar o que já tem sido constatado com os excertos anteriores. A primeira pergunta planificada foi colocada na implementação da aula, não descuidando o seu nível cognitivo. No entanto, a parte de verificação da solução não foi conseguida, passando assim uma das etapas do método de resolução de problemas.

A planificação e respetiva implementação da resolução da tarefa 10 surgem de seguida. Importa referir que foi ainda planificada uma tarefa extra, no seguimento da mesma, de modo a recordar a relação que existe entre a razão de semelhança entre os lados e entre as áreas de triângulos semelhantes.

Tarefa 10.

10. Relativamente à Figura 6, sabe-se que:

- o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C
- o ponto E pertence ao segmento de reta $[AB]$
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[AC]$
- o triângulo $[ADE]$ é retângulo em E

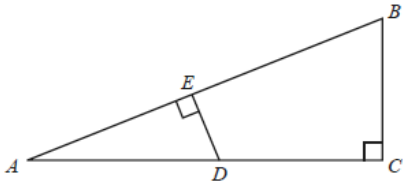


Figura 6

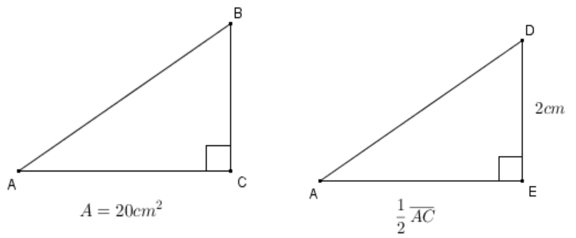
Sabe-se ainda que:

- $\overline{ED} = 2\,\text{cm}$
- $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$
- a área do triângulo $[ABC]$ é $20\,\text{cm}^2$

Determina $\overline{AC}$

Apresenta a tua resposta em centímetros.

Mostra como chegaste à tua resposta.

(15)	Como podemos encontrar $\overline{AC}$ com os dados fornecidos? **[PD]**	Pretende-se que os alunos reflitam sobre as informações que tenham e as interliguem de forma a encontrar uma estratégia para resolver o problema.
(16)	Uma vez que conhecemos $\overline{ED} = 2$ e existe uma relação entre $\overline{AE}$ e $\overline{AC}$ ($\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$), será que existe alguma relação entre os triângulos $[AED]$ e $[ABC]$? **[PC]** Que relação? **[PC]**	Pretende-se que os alunos concluam que os triângulos [ABC] e [ADE] são semelhantes, uma vez que $\text{A}\hat{\text{E}}\text{D} = \text{A}\hat{\text{C}}\text{B} = 90°$ e $\text{E}\hat{\text{A}}\text{D} = \text{B}\hat{\text{A}}\text{C}$.
(17)	Uma vez que os triângulos são semelhantes, o que podemos concluir acerca da relação existente entre as medidas dos seus lados? **[C-M]**	Pretende-se que os alunos recordem que quando dois triângulos são semelhantes então a medida dos lados correspondentes são diretamente proporcionais. 

		$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = r$ (*) $\frac{\overline{AC}}{\frac{1}{2}\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 4$ (**)
(18)	O que conhecemos agora do triângulo $[ABC]$ que nos permita determinar o comprimento de $[AC]$? **[PC]**	Pretende-se que os alunos integrem toda a informação conhecida e concluam que, ao conhecerem o valor da área do triângulo em causa é possível determinar o pedido. $A_{\Delta} = \frac{\overline{AC}\times\overline{CB}}{2} \Leftrightarrow 20 = \frac{\overline{AC}\times 4}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 10$ (***)
Resposta: O segmento de reta $[AC]$ mede 10 cm.		

1 ***Professora**: Então vamos lá ver o que temos:* [Leitura do enunciado e respetivo desenho da Figura 6 no quadro, colocando as informações dadas no desenho concebido]
2 ***Professora**: O que é que sabemos mais? **[PC]***
3 [Pretende-se que os alunos retirem todos os dados do enunciado, compreendendo que existem relações os comprimentos dos lados dos triângulos considerados ($\overline{\mathrm{ED}} = 2$ cm e $\overline{\mathrm{AE}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}$) e identificando que a área do triângulo [ABC] é $20\ \mathrm{cm}^2$]
4 ***Alunos**:* [Vários alunos dão palpites sendo impercetível na gravação embora percetível para a professora estagiária no momento]
5 ***Professora**: Que a área do triângulo ABC é $20cm^2$ … e queremos encontrar o comprimento de AC. Sugestões? **[PD]***
6 [Pretende-se alcançar o objetivo em (15)]
7 ***A17**: Semelhança de triângulos!*
8 ***A19**: Se sabemos que ED é 2 e virarmos o triângulo ao contrário, então BC é 4!*
9 ***Professora**: Porquê? **[PA]** Porque é que é 4 o BC? **[PA]***
10 ***A19**: Porque é metade…*
11 ***Professora**: E então? **[PA]***
12 ***A19**:* [impercetível]
13 ***Professora**: Tu tens que justificar com algo que a tua colega disse… Como é que se chama? **[PC]***
14 ***A17**: Semelhança de triângulos!*
15 ***Professora**: Primeiro que tudo, eles são semelhantes? **[PC]***
16 ***A17**: São.*
17 ***Professora**: Porquê? **[PA]** É preciso justificar…*
18 […]
19 ***Professora**: Então e estes dois triângulos são semelhantes porquê? **[PA]** Qual é o critério que vamos usar e onde é que se pode ver… **[PC]***
20 ***A21**: AA!*
21 ***A17**: AA*
22 ***Professora**: É o critério que relaciona os ângulos sim…*
23 ***A17**: Têm dois de…* [aluno interrompido pelo colega]
24 ***A21**: 90 graus!*
25 ***Professora**: Temos dois ângulos retos, sim, então $BCA = DEA = 90°$. E qual é o outro ângulo que é igual em ambos os triângulos? **[PC]***
26 ***Aluno**: CAB*
27 ***Professora**: Sim, que no outro triângulo corresponde a…? **[PC]***
28 ***Aluno**: DAE*
29 ***Professora**: $BAC = BAE$. Ou seja, os triângulos são semelhantes. O que é que fazemos agora? **[PD]** Já sabemos que os triângulos são semelhantes e portanto, os comprimentos dos lados são diretamente proporcionais…*

30 ***A18****: Fazer a área do triângulo…*
31 ***Professora****: Qual triângulo?* ***[R]***
32 […]
33 ***A18****: A área do triângulo grande.*
34 ***Professora****: Então se quisermos escrever a expressão da área do triângulo maior, como é que fica?* ***[PC]***
35 ***A16****: Área é igual a base vezes a altura…*
36 ***Professora****: Traduzindo para as incógnitas que temos na figura…* ***[R]***
37 ***A17****:* $AC \times BC$ *… a dividir por* 2.
38 ***Professora****: Chegámos à conclusão que os triângulos são semelhantes. Se eles são semelhantes, os comprimentos dos lados são diretamente proporcionais. O que é que isto significa?* ***[PC]*** *Pode ser, por exemplo, um lado medir 2 e no outro triângulo o lado correspondente medir 4. Depois disto, podemos sempre determinar a razão de semelhança entre os lados, que é o que estamos a fazer aqui! Em cima, reparem, meti os lados do triângulo maior!*
39 ***Alunos****: Ah! Já sei!*
40 ***Professora****: Fez-se luz?* ***[Rh]*** *Então vá!*
41 ***Professora****: Então agora eu vou comparar os lados do triângulo maior com os lados do triângulo mais pequeno. Mais não é ao calhas! Se o segmento* AB *é a hipotenusa, neste caso, é o lado que se opõe ao ângulo reto do triângulo grande, qual é que é o lado que se opõe ao ângulo reto do triângulo pequeno?* ***[PC]***
42 ***Alunos****:* AD*!*
43 ***Professora****: E agora aqui?* ***[PC]*** *Qual é o lado no triângulo pequeno que corresponde ao* AC*?* ***[PC]***
44 ***Alunos****:* AE*!*
45 ***Professora****: E relativamente ao* BC*?* ***[PC]***
46 **Aluno**: [impercetível na gravação, mas o aluno respondeu corretamente]
47 [*No quadro ficou o seguinte:* $r = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$ (*)]
48 ***Professora****: Percebido até aqui?* ***[R]*** *Então mas agora há medidas que conhecemos, não há?* ***[PC]*** *Sim ou não?* ***[R]*** *Então, lembram-se do que nós queríamos?* ***[R]*** *Determinar o…* ***[R]***
49 ***A23****:* AC*!*
50 ***Professora****: Então o* AC *ainda não conhecemos. E o* AE*, sabemos alguma coisa relativamente a este segmento?* ***[PC]***
51 ***A23****: Sim! Que é* $\frac{1}{2}$ *de* AC*!*
52 ***Professora****: Então o que podemos escrever aqui?* ***[PC]*** [referindo-se à igualdade (*)]
53 ***Professora****: E o* $[AB]$ *e o* $[AD]$*, sabemos alguma coisa acerca desses segmentos?* ***[PC]***
54 ***A18****: Não!*
55 ***Professora****: Então vamos deixar ficar como está!* $[BC]$ *e* $[DE]$*, conhecemos alguma coisa?* ***[PC]***
56 ***Alunos****: Não!*
57 ***Professora****:* BC *até era o que nos dava jeito conhecer para substituir na expressão da área… Não era?* ***[R]*** *Então agora, para não sermos muito exaustivos, e porque não vale a pena determinarmos tudo, vamos pegar nas razões que nos dão jeito!*
58 ***Professora****: Como é que podemos resolver agora?* ***[PD]*** *Diz!* [Dirigindo-se ao aluno A19, uma vez que este murmurou algo]
59 ***Professora****: Não?* ***[R]****… Isto é uma equação! Como é que a podemos resolver?* ***[PC]***
60 ***A18****: Professora, se* AE *é metade de* AC *então* 2 *é metade de* BC *!*
61 ***Professora****: Então, nós queremos isolar o* $\overline{BC}$*, colocá-lo num dos membros. Como é que fica?* ***[PD]***
62 […]
63 ***A18****: É 2!*
64 ***Professora****: Quanto é que mede o* BC *afinal?* ***[R]***
65 ***A18****: 4!*
66 ***Professora****: Agora o que é que podemos fazer, já sabendo* BC*?* ***[PD]***
67 ***A21****: Substitui-se* [impercetível/interrompido pelo colega]
68 ***A18****: Oh professora, não era mais fácil, se eles [os lados] são proporcionais, se um é metade de outro* [referindo-se aos lados]*, então os outros são todos!*
69 ***Professora****: Mas como é que justificas?* ***[PA]*** *Tens que justificar! Isso está correto mas tens que escrever como é que concluis isso, justificando muito bem!*
70 ***Professora****: Então temos que* 20 *é igual… diz! Que eu ao bocado interrompi-te…* ***[R]***
71 ***A17****: É igual a* $4 \times AC$*…*
72 ***Professora****: E agora?* ***[C-M]***

73 ***Alunos**:* [resolvem oralmente a equação, chegando a $\overline{\mathrm{AC}} = 10$]

Analisando o desenvolvimento da resolução da tarefa, é possível comprovar de novo, que houve uma especial atenção relativamente às perguntas a colocar, sendo a sua formulação fiel ao nível cognitivo planificado para cada momento. Na linha 38, embora seja formulada uma pergunta para qual a resposta pretendia a integração da informação (PC), no momento seguinte, perde a sua função uma vez que é imediatamente respondida por mim, dando um exemplo, e sem permitir que os alunos reflitam e respondam.

No entanto, revelam-se dificuldades em estruturar o meu discurso oral de forma a formular perguntas que sejam percetíveis para os alunos e que não fujam dos objetivos pretendidos. Na linha 11, surge a pergunta "E então?" quando deveria ter optado por uma pergunta com mais rigor, como por exemplo, "Como concluíste que é metade?" ou "Consegues justificar a tua afirmação?". De igual forma, na linha 13, surge "Como é que se chama?" referindo-me a "algo que a tua colega disse" e poderia ter formulado a pergunta de forma a não criar confusão nos alunos, como por exemplo, "Será que existe alguma relação entre os triângulos? Que relação existe entre eles?".

Denota-se ainda um descuido, a dada altura, com o alcance dos objetivos, quando não estruturei o meu questionamento na aula de forma atingir o objetivo em (17) (linha 29).

Já no final da resolução da tarefa, um dos alunos sugeriu outra estratégia para encontrar o valor de $\overline{AC}$, nomeadamente recorrendo à relação de proporcionalidade direta existente entre os lados do triângulo (linha 60). A sugestão do aluno não foi aproveitada, continuando com a resolução decorrente. Decorrido alguns minutos, o mesmo aluno volta a reforçar a sua ideia (linha 68), ao que lhe é explicado, individualmente, que é necessário justificar, mostrando-lhe os critérios de correção associados ao TI em causa. Com isto, o aluno acaba por ficar sem uma resposta conclusiva que lhe permita terminar a tarefa através da sua resolução.

Aproveitando a tarefa em causa e os conteúdos da ordem de trabalhos, nomeadamente a razão de semelhança entre os lados de triângulos semelhantes, a professora responsável pela turma sugeriu que fosse ainda planificada uma questão que permitisse aos alunos recordarem a relação entre esta razão de semelhança e a razão de semelhança entre as áreas de triângulos semelhantes.

Tarefa extra		
(19)	Sabendo que a área do triângulo $[ABC]$ é $20\ cm^2$, qual será a área do triângulo $[ADE]$? **[PD]**	Pretende-se que os alunos encontrem uma estratégia para determinar o pedido sendo capazes de a explicar, embora a finalidade será recorrer à relação existente entre a razão de semelhança entre os lados e entre as áreas de triângulos semelhantes. Tendo em conta que a razão de semelhança do comprimento dos lados é 2, a razão de semelhança da área é o seu quadrado, no caso, $2^2 = 4$. $\frac{A_{[ABC]}}{A_{[ADE]}} = 4 \Leftrightarrow \frac{20}{A_{[ADE]}} = 4 \Leftrightarrow A_{[ADE]} = 5$
Resposta: A área do triângulo $[ADE]$ é $5cm^2$.		

1 ***Professora:*** *Então agora quero-vos fazer uma pergunta: sem fazer cálculos, como é que vocês determinam a área do triângulo mais pequeno?* ***[PD]*** *Não é para determinar as medidas dos lados! Também daria mas não é o objetivo! Pensem um bocadinho, como é que podemos determinar a área do triângulo pequenino com o que já conhecemos.*
2 *[Pretende-se alcançar o objetivo em (19)]*
3 ***Professora****: Sugestões?* ***[PD]***
4 ***A18****: Professora! É 5!*
5 ***Professora****: 5?* ***[PA]***
6 ***A18****: É 20 a dividir por 4!*
7 ***Professora****: Porque é que é 20 a dividir por 4?* ***[PA]***
8 ***A18****: Porque é… um meio ao quadrado!*
9 ***Professora****: Porque é que a área do triângulo pequeno… o vosso colega disse que a área do triângulo mais pequeno é a quarta parte da área do triângulo maior. Porquê?* ***[PA]***
10 [Vários alunos discutem ideias]
11 ***Professora****: Se a razão de semelhança dos comprimentos dos lados é 2, então a razão das áreas…* ***[C-M]***
12 ***A17****: É o dobro!*
13 ***Professora****: Vai ser igual…. À razão de semelhança dos comprimentos dos lados do triângulo ao quadrado! Vocês perceberam?* ***[R]***
14 [Conclusão da tarefa proposta]

A última questão colocada ("Sabendo que a área do triângulo $[ABC]$ é $20\ cm^2$, qual será a área do triângulo $[ADE]$?") foi categorizada como Pensamento Divergente, uma vez que os alunos poderiam considerar outra estratégia de resolução que não fosse utilizar a razão de semelhança entre áreas de triângulos semelhantes. No entanto, todos os alunos recorreram à relação existente entre a razão de semelhança entre os lados e a razão de semelhança entre as áreas de triângulos semelhantes, não havendo nenhum ponto a acrescentar a esta análise.

Fazendo uma análise geral a todos os excertos apresentados, é possível concluir acerca do nível de idoneidade didática alcançado, nas suas diversas vertentes.

Relativamente à idoneidade epistémica pode-se verificar que a implementação da aula que visava rever alguns conteúdos programáticos, seguiu a planificação delineada, apresentando-se diversas situações-problemas de forma a englobar o máximo de conteúdos possível. Quanto à linguagem utilizada, verifica-se um maior descuido a nível da linguagem verbal, sendo portanto a componente que fica mais comprometida.

Uma vez previamente planificadas as aulas, é notória a idoneidade cognitiva pois, de outra forma, a planificação não teria sido aprovada pela professora responsável pela turma. Foi tida em consideração a capacidade cognitiva da turma em geral, planificando tarefas atingíveis para os alunos.

No que diz respeito à idoneidade interacional, nomeadamente na interação professor-aluno, verifica-se que a apresentação das tarefas foi adequada, explicitando a intenção da tarefa e recorrendo a perguntas de Rotina e Retórica para captar a atenção dos alunos. A própria resolução de tarefas, embora orientada por mim através de perguntas-chave, visava o envolvimento de toda a turma na dinâmica da aula. Para além do referido, houve a criação de momentos de discussão entre os alunos por forma a dinamizar a troca de ideias e justificações entre eles.

Relativamente à idoneidade ecológica importa referir que a planificação resultou da análise conjunta das diretrizes da escola e os normativos do Ministério da Educação, sendo utilizados como recursos tarefas de Testes Intermédios de anos anteriores como preparação para o TI a realizar.

De forma a compreender se existiram diferenças significativas entre a quantidade de perguntas planificadas e as perguntas formuladas, no que diz respeito ao seu nível cognitivo, procedi à sua contabilização. Como nem todas as tarefas planificadas foram propostas nas aulas, não inseri a sua informação nas contagens. Para além disso, foram elaboradas perguntas durantes as aulas num número consideravelmente mais alto, pelo que optei por tratar a contabilização em valores relativos. Note-se que uma planificação serve como uma orientação para o professor, auxiliando na orientação de uma aula. Deste modo, estará sempre sujeita a alterações, conforme as situações vão aparecendo e a aula é desenvolvida. É por isso natural que sejam formuladas mais perguntas em contexto de aula do que as preparadas na elaboração de uma planificação.

De seguida, apresentam-se os valores encontrados, sendo apresentado um quaro com os valores absolutos correspondentes, inicialmente, e, posteriormente, os valores relativos, agrupando as perguntas de baixo nível cognitivo, as perguntas de alto nível cognitivo, e as restantes.

Quadro 11. Número das perguntas planificadas por categoria

Categoria das perguntas	Valor absoluto
Conhecimento-Memória	4
Pensamento Convergente	14
Pensamento Divergente	7
Pensamento Avaliativo	0
Rotina	1
Retórica	0

Quadro 12. Número das perguntas planificadas por nível cognitivo

Nível cognitivo	Valor relativo
Baixo	69,23%
Alto	26,92%
Outros	3,85%

Quadro 13. Número das perguntas formuladas em contexto de aula por categoria

Categoria das perguntas	Valor absoluto
Conhecimento-Memória	21
Pensamento Convergente	53
Pensamento Divergente	10
Pensamento Avaliativo	16
Rotina	43
Retórica	4

Quadro 14. Número das perguntas formuladas em contexto de aula por nível cognitivo

Nível cognitivo	Valor relativo
Baixo	50,34%
Alto	17,69%
Outros	31,97%

Com a observação dos quadros apresentados é possível verificar que, embora cerca de 70% das perguntas planificadas sejam de nível cognitivo baixo, em contexto de aula, 50% das perguntas formuladas correspondiam a este nível. Relativamente às perguntas de nível cognitivo mais alto, os valores obtidos vão ao encontro da revisão da literatura realizada, confirmando que, efetivamente, representam uma minoria.

No entanto, é de extrema relevância a discrepância existente entre a quantidade de perguntas de Rotina e de Retórica planificadas e as formuladas. De facto, uma aula exige a formulação rotineira deste tipo de perguntas uma vez que são as que permitem o desenvolvimento da mesma. Para além disso, não se pode retirar valor a perguntas de nível cognitivo mais baixo uma vez que são fundamentais não só para uma boa gestão da aula, como também podem ser impulsionadoras da criação de ambientes propícios à formulação de perguntas por parte dos alunos ou à formulação de perguntas de nível cognitivo mais alto.

3.2.2. Monotonia e extremos de uma função (11.º ano)

Segundo o Programa de Matemática A do 11.º ano (Silva, Fonseca, Martins, Fonseca, & Lopes, 2002), no Tema II, nomeadamente no que diz respeito ao tópico *Taxa de Variação e Derivada*, deve-se constatar, por argumentos geométricos que:

i. *se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função e decrescente nesse intervalo;*

ii. *se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto.*

A planificação foi elaborada tendo em conta esta linha orientadora, seguindo ainda as indicações metodológicas sugeridas no Programa de Matemática A do 11.º ano, em particular, os exemplos sugeridos para que "os estudantes compreendam que há funções que têm derivada nula num ponto sem que nele haja extremo e que há funções com extremo que não têm derivada real no ponto em que tal acontece", no caso, x^3 e $|x|$.

Relativamente à dimensão epistémica importa desde já referir que a aula se desenrolou tal como previsto na planificação da mesma. Esta, por sua vez, foi elaborada procurando apresentar variedade de situações, relacionadas com outros conteúdos já estudados e navegando por entre as diversas formas de expressão matemática. Foi ainda exigido aos alunos que conjeturassem acerca da determinação de extremos de uma função recorrendo ao estudo da derivada dessa mesma função. É também importante mencionar que foram tidas em conta as diretrizes do Programa de Matemática A do Ensino Secundário, assim como a planificação anual da escola. Com as notas de campo recolhidas é possível ainda concluir que um dos objetivos propostos para a aula não foi concluído por falta de tempo, nomeadamente "Resolver problemas simples de otimização".

No que diz respeito à idoneidade cognitiva considero que esta tenha sido a dimensão com melhores níveis de adequação. Primeiramente, porque a própria aula foi planificada de acordo com os conhecimentos prévios dos alunos e as suas capacidades e competências enquanto turma. Segundo, porque é um conteúdo que os alunos consideram fácil, que não lhes gera conflitos e que é de fácil compreensão. Estes factos foram claros na implementação da própria aula e, deste modo, considero que os alunos atingiram os objetivos pretendidos, sob o ponto de vista cognitivo.

Relativamente ao questionamento e no que diz respeito à interação professor-aluno, formulei a pergunta "O que é uma função contínua?", intencionando obter uma resposta sob o ponto de vista geométrico, objetivo não concretizado pois os alunos não a entenderam. Desde modo, os alunos intrigaram-se sobre o que de facto é uma função contínua, em termos de definição, conflito ao qual eu não consegui responder. Para além disso, as notas de campo recolhidas referem que o nível cognitivo das perguntas formuladas continua a ser muito baixo, não tendo sido registado um exemplo significativo.

3.2.3. Inequações do 1.º grau a uma incógnita (9.º ano)

Relativamente a este tópico, o PMEB (Ponte et al., 2007b) considera como objetivos específicos “Compreender as noções de inequação e solução de uma inequação”, “Resolver inequações do 1.o grau utilizando as regras de resolução” e “Resolver e formular problemas envolvendo inequações”. Deste modo, apresenta ainda quatro notas para os docentes as quais tentei seguir ao planificar esta aula, tendo em conta, claro, os conteúdos lecionados pela professora responsável nas aulas anteriores:

- Propor a resolução de inequações simples antes da utilização de regras.
- Propor situações em que se use a transitividade das relações de ordem em $\mathbb{R}$ assim como a equivalência entre $a < b$ e $b > a$.
- O conjunto-solução de uma inequação deve ser representado graficamente e na forma de intervalo de números reais.
- Salientar a necessidade de escolher soluções de uma inequação tendo em conta o contexto da situação.

De seguida e tal como no secção 4.2.1., apresenta-se a planificação e a implementação da aula, dividindo por tarefa por forma a estabelecer um paralelismo e as respetivas conclusões mais pormenorizadas de cada momento implementado. É de mencionar que aparecerão de seguida excertos das planificações bem como os fragmentos que lhes correspondem das transcrições. Para aceder à planificação completa e à transcrição basta recorrer aos anexos (**13. Planificação 6: Inequações do 1.º grau a uma incógnita (9.º ano), 14. Transcrição da aula do dia 5 de maio**).

Relativamente à introdução da temática, segue-se a planificação e a respetiva implementação da Tarefa 1:

<table>
<tr>
<td>

1. Vamos considerar um retângulo cujo comprimento excede a largura em quatro unidades.

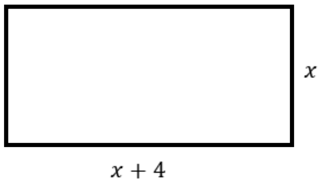
a) Escreve uma expressão simplificada em x que traduza o perímetro do retângulo. **[PC]**

(1) Pretende-se que os alunos integrem a informação fornecida, no caso, que considerando x como a largura, então $x+4$ representará o comprimento do retângulo, concluindo assim que o perímetro do mesmo é dado pela expressão $4x+8$.

</td>
<td>

Os alunos devem começar por desenhar um retângulo que traduza a situação, escrevendo o comprimento em função da largura, para de seguida escrever a expressão do perímetro.

Como podemos representar os lados do retângulo? **[PC]**
As duas perguntas seguintes servem para orientar os alunos caso estes não consigam de imediato responder à pergunta acima.
Será que conseguimos escrever o comprimento em função da largura? **[PC]** Se representarmos a largura por x, como podemos representar o comprimento? **[PC]**
De facto, como no enunciado nos diz que o comprimento é superior à largura em três unidades, por isso, se representarmos a largura por x o comprimento será $x+4$



Como podemos agora escrever o perímetro do retângulo? **[PC]**
Pretende-se que os alunos identifiquem de imediato que

$$P = 2\times x + 2\times(x+4)$$

E agora, simplificando, como é que fica a expressão? **[C-M]**

$$\begin{aligned} P &= 2\times x + 2\times(x+4) \\ &= 2x + 2x + 2\times 4 \\ &= 4x+8 \end{aligned}$$

</td>
</tr>
</table>

1 [Escrita no quadro do enunciado, propondo aos alunos que reflitam sobre a pergunta colocada.]
2 ***Professora****: Então eu quero que vocês me digam, sendo que a largura é x, como é que eu posso representar a outra medida do retângulo?* ***[PC]***
3 [Pretende-se alcançar o objetivo em (1)]
4 ***A14****: Então, $x+4$.*
5 ***Professora****: $x+4$, exatamente! Porque diz aqui que o comprimento do retângulo excede quatro unidades da largura. Então se a largura é x, claro que o comprimento do retângulo vai ser $x+4$. 'Tá?* ***[Rh]*** *Então agora o perímetro, como é que ficará?* ***[PC]***
6 ***A14****: P igual a…*
7 ***A18****: $4x$*
8 ***A13****: P igual a x…*
9 ***A18****: P igual a $4x+8$.*
10 ***Professora****: Antes de ser simplificado…* ***[R]***
11 ***A18****: $x+x+$…*
12 ***Professora****: Então é $2x$ mais duas vezes….$x+4$. Era isto?* ***[R]***
13 ***A13****: Sim!*

14 ***Professora****: Foi isto que fizeste?* ***[R]*** *[Dirigindo-se ao aluno A18]*
15 ***Professora****: Então, claro que isto vai dar, como o vosso colega [A18] estava a dizer,* $2x + 2x + 8$ *que simplificado dá* $4x + 8$.

Com esta introdução ao tema foi possível aferir que os alunos não demonstraram dificuldades. Claro que, tendo em conta o procedimento em causa, nada traz de novo ao que os alunos já conhecem e estão acostumados a trabalhar.

Relativamente ao nível cognitivo das perguntas formuladas, é possível verificar que a sua estrutura frásica e o rigor científico é bastante mais cuidada que as observadas nas aulas anteriores. Para além disso, o nível cognitivo das perguntas-chave planificadas foi cumprido durante a implementação da aula. Apenas a última pergunta planificada não foi formulada uma vez que, no desenvolvimento da aula, um aluno adiantou a simplificação da expressão em causa, não sendo necessário formular uma pergunta que o pedisse.

Para a continuação da aula e introdução, propriamente dita, da temática, segue-se a alínea b da Tarefa 1:

b) Qual será o valor da largura do retângulo para que o perímetro seja inferior a 20 unidades de medida? **[PD]** (2) Pretende-se que os alunos percebam que existem vários valores reais possíveis para o x, no entanto, com restrições, sendo aceite qualquer estratégia de reflexão para a questão.	*Os alunos podem criar as suas próprias ideias ou formas de responder à pergunta. Presume-se que começarão a encontrar valores para* x *através de tentativas.* Será único o valor de x que satisfaça o enunciado? **[PC]** *Os alunos devem concluir que existem vários valores para* x. Quais serão os valores de x que satisfazem a desigualdade? **[PC]** *As perguntas seguintes servem para orientar os alunos caso estes não consigam de imediato responder à pergunta acima, uma vez que se pretende que os alunos indiquem um intervalo de números reais.* Poderá o x ser negativo? **[PC]** E zero? **[PC]** E poderá ser, por exemplo, 5? **[PC]** *Os alunos devem concluir que x nunca poderá ser inferior ou igual a zero mas que, por outro lado, também não pode assumir valores superiores a três.* *Aqui deve-se escrever a desigualdade em causa (*$4x + 8 < 20$*) e explicar os conceitos envolvidos.*

1 ***Professora****: Agora quero que vocês pensem um bocadinho: qual será o valor da largura do retângulo para que o perímetro seja inferior a 20 unidades de medida?* ***[PD]***
2 [Pretende-se alcançar o objetivo em (2)]

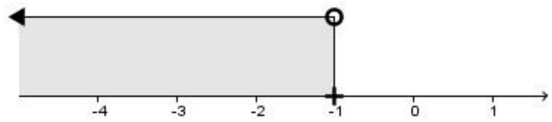
3 [...]
4 ***A13****: Se* x *for* 2*...*
5 ***Professora****: Se* x *for* 2*... vou apagar a alínea a 'tá bem?* ***[Rh]*** *Posso apagar a alínea* a*?* ***[R]***
6 ***A19****: Sim!*
7 ***Professora****: Sim... Se* x *for* 2*, era isto?* ***[Rh]*** *Então fica* 4 *vezes* 2 *mais* 8 *que dá...* ***[R]***
8 ***A17****:* 16.
9 ***A11****: Porque é que é* 2*?*
10 ***Professora****: Porque ela disse. 'Tamos a palpitar, a dar um palpite. Então é* 16 *e realmente* 16 *é inferior a* 20*. Existem mais valores que satisfaçam a condição?* ***[PC]***
11 ***A14****: Um.*
12 ***Professora****: Um?* ***[R]*** *Se for um,* $4x2\ +8$ *dá* 12 *é?* ***[R]*** *Mais?* ***[PC]***
13 ***A17****: Pode ser dois e meio.*
14 ***Professora****: Dois e meio, vamos ver. Gosto desse valor. Dois vírgula cinco, então* $4 \times 2{,}5 + 8$ *dá...* ***[R]***
15 ***A13****: 18*
16 ***Professora****: 18. Então e será que pode ser cinco?* ***[PC]***
17 ***A13****: Não.*
18 ***Professora****: Não pode. E...*
19 ***A****: [impercetível]*
20 **Professora** *Diz.* ***[R]***
21 ***A****: [impercetível]*
22 ***Professora****: Três,* x *igual a três.* $4 \times 3 + 8$ *dá* 20*. Ah! Mas eu quero que o perímetro seja inferior a 20... por isso não dá. Então e se fosse 2,9999...?* ***[PC]***
23 ***A9****: Dá.*
24 ***A13****: Dava.*
25 ***Professora****: Dava. E se fosse* 0*? Se o* x *fosse* 0*.* ***[PC]***
26 ***A13****: Dava!*
27 [...]
28 ***Professora****: Olhem lá para a figura... A largura pode ser zero?* ***[PC]***
29 ***A17****: Não.*
30 ***Professora****: Não pode ser zero! Não é?* ***[Rh]*** *Então, estamos ali a considerar um retângulo se a largura for zero não é um retângulo. Quanto muito é uma linha. E... se o* x *fosse negativo?* ***[PC]***
31 ***A14****: Não porque não há medidas negativas.*
32 ***Professora****: Boa! Então... vamos lá pensar um bocadinho no que é que efetivamente nós temos. Vou apagar aqui 'tá bem?* ***[Rh]*** *Pensem lá se não é isto que nós queremos: nós queremos que a expressão* $4x + 8$ *seja inferior a* 20*. [Escrita no quadro, ficando* $4x + 8 < 20$*] É ou não?* ***[C-M]***
33 ***A17****: Sim.*

Com a análise do excerto comparativamente à planificação delineada, as conclusões são semelhantes às já realizadas com o excerto anterior. De forma a visualizar de forma mais simplista a coerência entre as perguntas planificadas e as formuladas, segue-se um quadro comparativo:

Planificação	**Implementação**
Se representarmos a largura por x, como podemos representar o comprimento? **[PC]**	Então eu quero que vocês me digam, sendo que a largura é x, como é que eu posso representar a outra medida do retângulo? **[PC]** (alínea a, linha 2)
Como podemos agora escrever o perímetro do retângulo? **[PC]**	Então agora o perímetro, como é que ficará? **[PC]** (alínea a, linha 5)
E agora, simplificando, como é que fica a expressão? **[C-M]**	[Não foi formulada] (alínea a, linha 15)
Será único o valor de x que satisfaça o enunciado? **[PC]**	Existem mais valores que satisfaçam a condição? **[PC]** (alínea b, linha 10)
E poderá ser, por exemplo, 5? **[PC]**	Então e será que pode ser cinco? **[PC]** (alínea b, linha 16)
E zero? **[PC]**	E se fosse 0? Se o x fosse zero. **[PC]** (alínea b, linha 25)
Poderá o x ser negativo? **[PC]**	E… se o x fosse negativo? **[PC]** (alínea b, linha 30)

Embora não exemplificado aqui, também a parte de Explicitação dos conceitos envolvidos tem presente uma pergunta, no caso, de Pensamento Avaliativo, que para além de planificada, também foi implementada. Poderá verificar esta afirmação nos anexos correspondentes.

Por forma a passar para a resolução de inequações de 1.º grau propriamente ditas, segue-se a planificação e respetiva implementação da tarefa 2:

2. Resolve em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações e apresenta o conjunto-solução na forma de um intervalo de números reais. a) $-2 + 4x < -6$ b) $-5x + 1 \leq 3 - 2x$	*Deve ser proposto aos alunos que copiem para o caderno diário a tarefa.*
a) $-2 + 4x < -6$ $\quad +2$ $\Leftrightarrow 4x < -6 + 2$ $\Leftrightarrow 4x < -4$ $\quad \times \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow x < \frac{-4}{4}$ $\Leftrightarrow x < -1$  $S =]-\infty;\ -1[$	Como será que podemos resolver uma inequação de forma a encontrar todas as suas soluções? [PD] Será que podemos utilizar princípios de equivalência semelhantes aos que utilizamos para resolver equações? [PD] Se estivéssemos perante uma equação, o que fariam? [C-M] Será legítimo fazer essa passagem também nas inequações? [PC] Que propriedades conhecem? [C-M] *(3) Pretende-se que os alunos recordem a monotonia total da relação de ordem $<$ em relação à adição e a monotonia parcial da relação de ordem $<$ em relação à multiplicação, constatando que, de facto, são utilizados princípios de equivalências idênticos aos utilizados na resolução de equações.* Como podemos começar então a resolver a inequação? [PC] Devemos começar por utilizar a monotonia total da relação de ordem $<$ em relação à adição, adicionando 2 unidades a ambos os membros. E de seguida, o que podemos fazer? [PC] Podemos utilizar a monotonia parcial da relação de ordem $<$ em relação à multiplicação, multiplicando por $\frac{1}{4}$ ambos os membros. Qual é então o conjunto-solução da inequação? [C-M] $S =]-\infty;\ -1[$

1 ***Professora**: Então, se isto fosse uma equação o que é que nós fazíamos logo, primeiro? **[C-M]** Eu vou até escrever aqui* $-2 + 4x = -6$*…*
2 ***A17**: Passava primeiro x's para um lado…*
3 ***A13**: Ya, x's para um lado…*
4 ***Professora**: Este, não é? **[Rh]** Ficava neste membro, e o* -2*? **[C-M]***
5 ***Professora**: Somava-se* $+2$ *aos dois membros. Então… será que se eu tiver aqui o menor eu posso deixar o 4x… não, não era isto que eu queria fazer. Então tenho* $-2 + x$ *será que eu posso somar aqui* 2 *para nos dar ali* 0*? **[C-M]***
6 ***A13**: Aplicamos aquelas propriedades…*
7 ***Professora**: Boa! É mesmo isso que eu queria que tu me dissesses. Então, posso fazer isto ou não? **[C-M]***

8 ***A17****: Sim.*

9 ***Professora****: Porquê? Eu quero é que vocês me digam o porquê.* ***[PC]***

10 [Pretende-se alcançar o objetivo em (4)]

11 ***Professora****: Porque há uma propriedade que vocês conhecem que se chama…* ***[C-M]***

12 ***A17****: Relação de ordem.*

13 ***Professora****: Relação de ordem em relação a que operação?* ***[C-M]***

14 ***A13****: À adição!*

15 ***Professora****: À adição, muito bem. Então efetivamente, e se calhar é melhor vocês escreverem, eu posso fazer este passo. E sim posso meter que é equivalente, ok?* ***[R]*** *Porque vocês conhecem a monotonia da relação de ordem, neste caso menor, em relação à adição. Então, numa equação* $-2+4x=-6$*, o que vocês decoram, o que é que vocês decoram A9?* ***[R]*** *Ah… está ali a subtrair por isso passa para o outro lado a somar, mas não é isso que vocês fazem, isso é o que vocês decoram. O que vocês fazem…O que é que vocês querem?* ***[R]*** *É ficar aqui isolado com o* $4x$ *é ou não?* ***[Rh]*** *Eu já expliquei isto numa aula que também fui eu que dei. Então eu posso somar* 2 *a ambos os membros e a minha equação vai ser equivalente, ela não é a mesma, ela é equivalente, têm as mesmas soluções, lembram-se disto?* ***[R]***

16 ***A11****: A professora já explicou isso.*

17 ***Professora****: Então, o que vocês efetivamente fazem não é passar para o outro lado a somar, subtrair ou como é que vocês decoram. O que vocês fazem é, vocês querem que fique aqui só* $4x$ *e eu vou fazer com que este* 2 *se anule mas para eu somar a um lado também tenho de somar ao outro, ou se eu multiplico de um lado também tenho de multiplicar ao outro, 'tá?* ***[Rh]*** *Serve o mesmo para as inequações.*

18 *Então, resultado… Agora sim é que vamos simplificar, como é que fica?* ***[C-M]***

19 ***A18****:* $4x-6+2$

20 ***Professora****: que dá…* ***[R]***

21 ***A18****:* -4

22 ***Professora****: Boa,* -4*. E agora?* ***[C-M]***

23 ***A21****:* x*…*

24 ***Professora****: Equivalente… será que posso?* ***[PC]***

25 ***A10****: Não.*

26 ***Professora****: Será que posso?* ***[PC]*** *O que é que ias fazer [A11]?* ***[R]***

27 ***A11****: Não, ia fazer asneira acho eu.*

28 ***Professora****: Então o que é que eu fiz?* ***[R]*** *Mais uma vez, voltando às equações, o que é que fariam?* ***[C-M]***

29 ***A4****:* $x=-4$ *a dividir por* 4 *que dava* -1*.*

30 ***Professora****: Ou seja, o que é que fizeste a ambos os membros?* ***[C-M]***

31 ***A10****: Dividir!*

32 ***Professora****: Dividiste por…*

33 ***A18****:1/4*

34 ***Professora****: Será que podes?* ***[PC]***

35 ***A4****: Sim.*

36 ***Professora****: Será que podes aqui multiplicar por um quarto?* ***[PC]***

37 ***A9****: Sim, utilizando a monotonia parcial…*

38 ***Professora****: Boa. Boa, isso mesmo. Monotonia da relação…*

39 ***A17****: Parcial!*

40 ***Professora****: Exatamente, tens toda a razão… de ordem menor.*

41 ***Professora****: … em relação à multiplicação. Agora simplificado, como é que fica?* ***[C-M]***

42 ***Professora****: Então como é que fica simplificada a expressão?* ***[C-M]***

43 ***A18****:* x

44 ***Professora****:* x

45 ***A18****: Menor*

46 ***Professora****: Menor*

47 ***A18****:* -4 *sobre* 4

48 ***Professora****: Que dá -1. Representem lá na reta real.*

49 ***Professora****: Já representaram na reta real?* ***[R]***

50 ***A4****: Não.*

51 ***Professora****: Então representem. Sabem-me dizer o conjunto solução já?* ***[C-M]*** *Conjunto-solução. O que pede na pergunta é o conjunto solução sabem-mo dizer?* ***[C-M]***

52 ***A13****: É um intervalo…*

53 ***Professora****: Dá um intervalo. Qual é que é o intervalo?* ***[R]***

54 ***A****: [impercetível]*

55 ***Professora****: até…*
56 ***A18****:* -1
57 ***Professora****: Aberto ou fechado?* ***[C-M]***
58 ***A13****: Aberto!*
59 ***Professora****: Mas o que eu quero que vocês me façam, para perceberem muito bem onde estamos, é a reta.*
60 ***Professora****: Resultado. O meu conjunto de solução vai ser, como o [A14] disse, menos infinito até* -1.

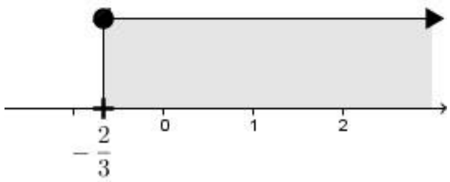
<table>
<tr>
<td>b)

$-5x + 1 \leq 3 - 2x$

$\Leftrightarrow -5x + 2x \leq 3 - 1$

$\Leftrightarrow -3x \leq 2$ $\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$



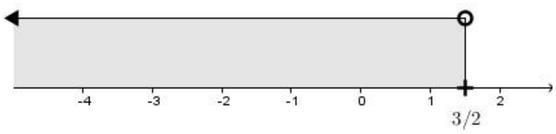
$S = [-\frac{2}{3}; +\infty[$</td>
<td>Pretende-se que os alunos resolvam a inequação sem ajuda, relembrando que, ao multiplicar ambos os membros por um número negativo, troca o sentido da desigualdade.</td>
</tr>
</table>

61 ***Professora****: Então, primeiro o que vamos fazer?****[C-M]*** *Se fosse uma equação, vá lá. Se fosse uma equação o que é que fariam?* ***[PC]***
62 ***A13****:* x*'s para um lado*
63 ***Professora****: Termos com incógnita num membro e os termos sem incógnita para o outro, é isso?* ***[R]*** *Então vamos pensar. O* $5x$ *já cá estava. E o* $2x$*, podemos passá-lo para este lado?* ***[PC]***
64 ***A11****: Sim.*
65 ***Professora****: Porquê?* ***[PA]*** *E qual é a propriedade que utilizamos?* ***[PC]***
66 ***A14****: Monotonia total em relação à adi…*
67 ***Professora****: Então aqui nós usamos a monotonia da relação de ordem em relação à…*
68 ***A11****: Adição!*
69 ***Professora****: Efetivamente o que nós fizemos foi somar* $2x$ *da mesma forma como a A11 estava a dizer. Isto aqui agora simplificado dá… Quanto é que dá isto simplificado?* ***[R]***
70 ***A13****:* $-3x - 1$
71 ***Professora****: E agora?* ***[R]*** *Mais uma vez temos monotonia… vocês já sabem agora, só que o que fizemos foi com* -1*. Agora, simplificando… Já devia estar resolvido. E agora?* ***[C-M]***
72 ***A21****:* x *menor que* -2 *sobre* 3.
73 ***Professora****: Porque é que a monotonia em relação à multiplicação era parcial?* ***[PC]***
74 ***A13****: Porque o sinal muda!*
75 ***Professora****: Porque o sinal muda. Então, vá, outra sugestão que essa não foi muito boa. Diz lá outra vez!*

76 ***A21***: x
77 ***Professora***: *Sim…*
78 ***A21***: *igual a* -2, *não* $-2/3$
79 ***Professora***: *Então, vão lá ver o caderno para trás, o que é que acontecia?* ***[C-M]***
80 ***A***: *[impercetível]*
81 ***Professora***: *Quando nós queremos mul… neste caso o que é que nós queremos?* ***[R]*** *Vamos lá ver… neste caso o que é que nós queremos fazer?* ***[R]*** *Multiplicar por menos um terço. Sim ou não?* ***[Rh]***
82 ***A17***: *Porque queremos que fique positivo.*
83 ***Professora***: *Sim. Exato, era para ficar positivo, então tem que ser menos. Mas vocês viram que quando nós queremos multiplicar por um número negativo, o sentido da desigualdade altera-se. Então podemos fazer devagarinho. Quando nós queremos multiplicar por um número negativo para isolar a nossa incógnita efetivamente o que é que nós queremos?* ***[R]*** *Isto… [escrevendo no quadro] É ou não?* ***[Rh]*** *Isto aqui depois não dará* x*?* ***[R]*** *Então quando queremos fazer isto… quando nós queremos fazer isto, a professora disse que automaticamente ao multiplicar por um número negativo…*
84 ***Professora***: *Quando nós queremos, já disse isto três vezes, quando nós queremos multiplicar por um número negativo, o sentido da desigualdade altera-se. Isto é muito importante que vocês…*
85 ***A11***: *Mas muda o sinal?*
86 ***Professora***: *Ao multiplicar por negativo sim. 'Tá?* ***[Rh]*** *Então ao que o [A18] chegou e muito bem, dá* x *maior ou igual* $-2/3$.
87 ***Professora***: *Então como é que ficou na reta?* ***[R]***
88 ***A18***: *[impercetível]*
89 ***Professora***: *Diz…*
90 ***A18***: *de* $-2/3$ *para menos infinito.*
91 ***Professora***: *Menos infinito?* ***[R]***
92 ***A18***: *Ah sim, para mais infinito!*
93 ***Professora***: *Para mais ou para menos infinito?* ***[C-M]***
94 ***A10***: *Mais.*
95 ***Professora***: *Então, quero que o meu* x *seja maior… marquei a abcissa* $-2/3$, *eu quero que os valores de* x *sejam superiores. [Representando na reta real]*
96 ***A18***: *É para mais.*
97 ***Professora***: *Maior. Fechado ou aberto?* ***[R]***
98 ***A13***: *Fechado.*
99 ***Professora***: *Então qual é que é o conjunto solução?* ***[C-M]***
100 ***A13***: *Para mais infinito aberto*
101 ***Professora***: *Boa!*

Analisando o desenvolvimento da tarefa em causa, existem dois reparos a fazer. Em primeira instância, a linguagem utilizada nem sempre foi a mais correta, como se pode verificar na linha 15 da alínea a ("…está ali a subtrair por isso passa para o outro lado a somar") e nas linhas 69 e 83 da alínea b ("Quanto é que dá isto simplificado?" e "Então quando queremos fazer isto…"). Apresenta-se assim um nível bastante baixo de idoneidade epistémica. Relativamente às perguntas formuladas, e como já resultado das conclusões da tarefa anterior, estas revelaram níveis cognitivos adequados aos momentos, coincidindo com a categorização planificada para os mesmos momentos do desenvolvimento da tarefa.

Para alcançar o terceiro objetivo delineado, foram planificadas as Tarefas 3 e 4, como desenhadas na planificação. No entanto, por motivos alheios a mim, e relacionados com o gravador, o som resultante da implementação da Tarefa 3 nem sempre é claro, ficando este muito comprometido quando se avança para a Tarefa 4. Deste modo, de seguida apenas aparecerá a planificação e respetiva implementação (sob a forma de excerto) da Tarefa 3.

Resolução de exercícios e problemas envolvendo inequações do 1.º grau a uma incógnita	
3. Dada a inequação $x - \frac{1}{2} > 2(x-1)$ a) Representa na reta real o conjunto-solução da inequação. b) Qual é o maior número inteiro que satisfaz a inequação.	*Deve ser proposto aos alunos que copiem para o caderno diário as tarefas seguintes e as resolvam.* *Como a tarefa é idênticas às anteriores, devem ser seguido o mesmo tipo de perguntas, caso os alunos ainda não se tenham familiarizado com a resolução de inequações.*
a) $x - \frac{1}{2} > 2(x-1)$ $\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} > 2x - 2$ $\Leftrightarrow x - 2x > -2 + \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow -x > -\frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$  $S =]-\infty; \frac{3}{2}[$	
b) É o número 1.	

1 ***Professora**: O que é que vocês começaram por fazer?* ***[C-M]*** *Diz [A11]*.
2 ***A11**: Começar a resolver o que está dentro de parenteses.*
3 ***Professora**: Simplificar o que está dentro de parenteses. 'Bora lá! Rápido! E agora?* ***[C-M]***
4 ***A11**: E agora temos de resolver… o* x *para um lado…*
5 ***Professora**: As incógnitas para um lado como faziam nas equações, ok?* ***[Rh]*** *Então como fica? Diz!* ***[R]***
6 ***A14**: Fica* $x-\frac{1}{2}$ [impercetível]*. Eu multipliquei.*
7 ***Professora**: Multiplicaste o quê?* ***[R]*** *Ok, pode ser. A vossa colega pegou, utilizou uma das monotonias que vocês conhecem. Vê se foi isto que fizeste. Multiplicavas ambos os membros por* 2*, não foi?* ***[R]*** *Podemos?* ***[PC]***
8 ***Professora**: Então como é que fica?* ***[R]***
9 ***A11**: Isso fica* $2x-4x$.
10 ***Professora**: Ok, queres primeiro aqui, só estou a multiplicar por* 2.
11 ***A14**: Ah... ok! E depois* [impercetível] *...*
12 ***Professora**: Eu posso multiplicar por* 2 *ambos os membros?* ***[C-M]***
13 ***A10**: Pode.*
14 ***Professora**: Porquê?* ***[PA]*** *O que é que utilizo?* ***[PC]***
15 ***A10**: Monotonia parcial…*
16 ***Professora**: Monotonia parcial em relação à multiplicação. É melhor escreverem aí ao lado. E agora como a A11 estava a dizer* $2x-4x$*… era isto?* ***[R]***
17 ***A11**: Sim!*
18 ***Professora**: E neste membro?* ***[C-M]***
19 ***A11**:* $1-4$
20 ***Professora**: Ou seja, efetivamente o que ela fez foi subtrair* $4x$ *em ambos os membros, foi ou não?* ***[R]***
21 ***A11**: Sim.*
22 ***Professora**: E adicionaste* 1.
23 ***Professora**: A seguir… simplificar a expressão. Já está feito [A4], tudo até ao fim?* ***[R]***
24 ***A4**: Tentei resolver só* [impercetível]*.*
25 ***Professora**: Simplifica-me esta expressão, anda, rápido. Vá!* ***[R]***
26 ***A4**:* $-x$
27 ***Professora**: Anda!* ***[R]*** *Com confiança e rápido!*
28 ***A4**: Maior do que* $-3/2$
29 ***Professora**: ´Tá?* ***[Rh]*** *Até aqui toda a gente chegou?* ***[R]*** *Provavelmente… não houve ninguém que não tenha feito esta passagem aqui, que não tenha feito isto?* ***[R]***
30 ***A13**: Eu fiz mais à frente.*
31 ***A18**: Eu fiz.*
32 ***Professora**: Mais à frente… ok.*
33 ***A21**: Eu fiz mal.*
34 ***Professora**: E agora, o que é que vocês fizeram aqui?* ***[R]*** *Então?* ***[R]***
35 ***A11**: Aí troca o sinal.*
36 ***Professora**: Aqui troca o sentido da desigualdade, era isso que querias dizer, não era?* ***[R]***
37 ***A11**: Era 'stora.*
38 ***Professora**: Respondam agora à alínea b e expliquem-me o vosso raciocínio!* ***[PA]***
39 ***Professora**: Alínea b, já não a tenho aqui mas vocês têm o enunciado.*
40 ***A13**: Qual é o maior número inteiro…*
41 ***A11**: Então há-de ser 1,4.*
42 ***Professora**: Inteiro. Um número inteiro.*
43 ***A11**: Ah! Inteiro! É 1.*
44 ***Professora**: Então este aqui é 3/5, eu vou ter que procurar…*
45 ***Professora**: Então qual é que é o número inteiro que satisfaz a igualdade?* ***[PC]***
46 ***A21**: 1.*
47 ***Professora**: Porquê?* ***[PC]***
48 ***A13**: Então porque 3/2 é [impercetível].*

Relativamente à terceira tarefa poucas são as conclusões passíveis de retirar uma vez que a planificação não incluía a formulação de perguntas-chave, mas sim apenas orientações a seguir. Deste ponto de vista, as mesmas foram seguidas, tornando o desenvolvimento da tarefa coerente com a sua planificação.

Fazendo uma análise geral à aula analisada é possível aferir acerca da idoneidade didática alcançada, nas suas diversas vertentes.

Mais uma vez, e tal como já observado anteriormente, a idoneidade epistémica ficou comprometida, no que diz respeito à componente da linguagem. Relativamente às restantes componentes, é possível afirmar que a aula decorreu como planificada, apresentando-se várias situações-problemas representativas.

De novo a idoneidade cognitiva é visível uma vez que a aula foi planificada tendo em conta os conhecimentos prévios dos alunos. Relativamente à apropriação dos conhecimentos, compreensões e competências pretendidas por parte dos alunos, não é possível retirar conclusões apenas com uma aula, pelo que não vou fazer inferências a esse nível.

No que diz respeito à idoneidade interacional, verifica-se que foram utilizados diversos recursos retóricos e argumentativos para captar a atenção dos alunos, tentando-se sempre fomentar o diálogo. Também houve espaço para que os alunos pudessem resolver individualmente as tarefas por forma a incentivar a sua autonomia.

Por último, e uma vez que a planificação delineada é o resultado do cruzamento dos documentos orientadores do Ministério da Educação e da escola em causa, acredito que tenha sido alcançada uma boa idoneidade ecológica.

De forma a conseguir fazer uma comparação entre o número de perguntas planificadas e as formuladas, seguem-se os quadros construídos identicamente aos apresentados na análise da aula de Preparação para o Teste Intermédio (9.º ano):

Quadro 15. Número das perguntas planificadas por categoria

Categoria das perguntas	Valor absoluto
Conhecimento-Memória	4
Pensamento Convergente	16
Pensamento Divergente	4
Pensamento Avaliativo	1
Rotina	0
Retórica	0

Quadro 16. Número das perguntas planificadas por nível cognitivo

Nível cognitivo	Valor relativo
Baixo	80%
Alto	20%
Outros	0%

Quadro 17. Número das perguntas formuladas em contexto de aula por categoria

Categoria das perguntas	Valor absoluto
Conhecimento-Memória	25
Pensamento Convergente	22
Pensamento Divergente	1
Pensamento Avaliativo	3
Rotina	42
Retórica	13

Quadro 18. Número das perguntas formuladas em contexto de aula por nível cognitivo

Nível cognitivo	Valor relativo
Baixo	44,34%
Alto	3,77%
Outros	51,89%

Analisando os valores apresentados, é possível concluir que a aula é pautada por perguntas de nível cognitivo baixo, resultando, aquando da sua planificação, em 80% das perguntas-chave formuladas. Deste modo, podemos indagar acerca da qualidade da planificação elaborada. De facto, a planificação peca na medida em que aposta nas orientações e direções a seguir sem estabelecer perguntas-chave em todas as tarefas. Por outro lado, é uma aula de natureza mais expositiva o que perfaz um número maior de perguntas de baixo nível cognitivo. Nesta situação, considero que faltou a planificação de um prolema que permitisse aos alunos desenvolver outro tipo de competências tais como o raciocínio e a comunicação matemáticos, assentando, deste modo, em perguntas do tipo PD e PA.

3.2.4. Breve conclusão

Com as reflexões realizadas após a primeira fase e uma vez decididos os objetivos para este trabalho, as planificações das aulas sofreram algumas alterações, nomeadamente no que diz respeito à formulação de perguntas em contexto de sala de aula, adequando o seu nível cognitivo a cada momento específico.

Em primeira instância é importante verificar que o nível cognitivo das perguntas formuladas em contexto de aula segue, em geral, o nível cognitivo das perguntas planificadas para a mesmas, sendo coerentes com os momentos de natureza distinta presentes em cada aula. Este facto permite inferir que, em geral, foi mais cuidada a formulação de perguntas, tentando despertar nos alunos as capacidades necessárias para o desenvolvimento das suas aprendizagens.

Por outro lado, e também já constatado na primeira fase, existem bastantes perguntas mal formuladas que carecem de rigor científico trazendo, deste modo, impercetibilidades para os alunos. Esta situação torna contraproducente o resultado constatado no parágrafo anterior, uma vez que não permite aos alunos entenderem o pretendido com a pergunta formulada, criando assim confusão no raciocínio dos alunos.

Sob um ponto de vista mais geral de todas as aulas dadas, é possível verificar que a maioria das perguntas planificadas e formuladas inserem-se nos níveis cognitivos mais baixos (cerca de 40/50% das perguntas). Para além disso, em contexto de aula, a maioria de perguntas formuladas são de Rotina ou Retórica asseverando a importância que este tipo de perguntas assume no desenvolvimento da própria aula.

Em suma, pode-se constatar que a estratégia utilizada para a melhoria do meu questionamento surtiu efeitos bastante positivos. Deste modo, posso afirmar que uma planificação que vá ao encontro das minhas dificuldades e se centre na melhoria das práticas docentes é uma mais-valia para o aperfeiçoamento das minhas técnicas de questionamento em contexto de aula. Na minha opinião, fica ainda por melhorar substancialmente o tipo de linguagem utilizado, considerando que devo trabalhar mais as palavras a utilizar de forma a não perder o rigor científico necessário.

Fase	Data	Ano de escolaridade	Temática	Objetivos gerais	Reflexões gerais
2ª . Fase	10 março 2014 12 março 2014	9.º ano	Várias temáticas para revisão	Rever/recordar conteúdos programáticos já estudados ao longo do ciclo de estudos.	Em geral, e na sua maioria, as perguntas formuladas em contexto de aula seguiram a planificação. O rigor científico das perguntas formuladas nem sempre está contemplado e, por vezes, as perguntas colocadas são confusas e de difícil compreensão para os alunos. Por vezes o enunciado não é lido o que se pode traduzir num problema para o desenvolvimento da tarefa em causa.
	23 abril 2014	11.º ano	Monotonia e extremos de uma função	Relacionar o sinal da derivada com a monotonia. Resolver problemas simples de otimização.	Um dos objetivos gerais delineados não foi alcançado. O nível cognitivo das perguntas colocadas situou-se nos níveis mais baixos.
	5 maio 2014	9.º ano	Inequações do 1.º grau a uma incógnita	Compreender as noções de inequações e de solução de uma inequação. Resolver inequações do 1.º grau utilizando as regras de resolução. Resolver e formular problemas envolvendo inequações.	Linguagem descuidada e com pouco rigor científico. Perguntas formuladas em contexto de aula coerentes com o nível cognitivo das perguntas formuladas em planificação. Maioria das perguntas formuladas são de baixo nível cognitivo.

Quadro 19. Quadro sintetizante da segunda fase

3.3. A opinião dos alunos

Concluído o processo reflexivo da minha prática docente, senti a necessidade de compreender se, sob o ponto de vista dos alunos, as conclusões se assemelhavam. Para o efeito, foi aplicado um questionário, de novo à turma do 9.º ano de escolaridade uma vez que, para além de ser a turma com mais aulas dadas, foi também a turma que garantiu a autorização para a utilização das respostas para este trabalho.

O questionário em causa foi elaborado com base em Adedoyin (2010), sendo adaptado de forma a alcançar os objetivos pretendidos.

Relativamente à segunda parte do questionário no qual se pretendia avaliar, de forma sumária, o impacto do questionamento dos professores de matemática, em geral, resultou no seguinte quadro:

Quadro 20. Medidas de localização e dispersão das respostas dos alunos (Parte II)

De um modo geral, os professores de matemática que tens tido…		Discordantes	Concordantes	Média
1.	…fazem muitas perguntas durante as aulas.	15,40	84,60	2,88
2.	…desperdiçam muito tempo das aulas a fazerem perguntas.	88,40	11,50	1,92
3.	… fazem perguntas que têm sempre impacto na minha compreensão dos conceitos matemáticos.	7,70	88,50	3,15
4.	… fazem perguntas que influenciam o meu desempenho nas aulas.	11,50	88,40	2,88
5.	…fazem perguntas que são essenciais para que eu seja bem sucedido.	11,50	88,50	3,00

Com a análise do quadro é possível inferir que os alunos, embora considerem que são feitas muitas perguntas durante as aulas, estas não se traduzem num desperdício de tempo. Para além disso, é maioritária a percentagem dos alunos que considera que as perguntas feitas pelo professor contribuem para o seu próprio desenvolvimento.

A Parte III do questionário foi subdividida em quatro partes, sendo cada uma delas caracterizada por objetivos distintos. Deste modo, também a análise resultará em quatro partes.

O seguinte quadro diz respeito aos resultados obtidos relativamente à frequência das perguntas colocadas, estabelecendo uma ligeira comparação entre os momentos de índole expositiva e os momentos de índole de resolução de tarefas.

Quadro 21. Medidas de localização e dispersão das respostas dos alunos relativamente à frequência das perguntas (Parte III)

A professora estagiária…		Discordantes	Concordantes	Média
1.	…fez muitas perguntas nas aulas.	15,40	80,80	3,00
2.	…fez muitas perguntas nos momentos de resolução de exercício.	11,50	88,40	2,92
3.	…fez muitas perguntas nos momentos de exposição de conteúdos programáticos.	15,40	84,60	2,88

Nota. 3,8% dos alunos não responderam a III.1

Com a observação dos valores apresentados é possível concluir que os alunos consideram que foram formuladas muitas perguntas nas aulas, independentemente da natureza dos momentos decorrentes. Fazendo uma comparação com os dados resultantes da análise das transcrições das aulas é possível verificar que a última aula dada, de natureza mais expositiva do que as aulas anteriores, foi a que contabilizou mais perguntas formuladas. É ainda importante relembrar que as transcrições não foram integrais pelo que os momentos não contemplados podem-se traduzir em resultados que vão de encontro à apreciação de alunos relativamente a esta questão.

Tendo como base a categorização de perguntas proposta por Pedrosa de Jesus (1987), analisou-se a opinião dos alunos relativamente à intenção das perguntas formuladas, traduzindo-se nos seguintes valores:

Quadro 22. Medidas de localização e dispersão das respostas dos alunos relativamente à intenção das perguntas (Parte III)

A professora estagiária…		Discordantes	Concordantes	Média
4.	…fez perguntas que apenas exigiam que eu me lembrasse de factos ou fórmulas.	38,50	61,50	2,65
5.	…fez perguntas que me obrigaram a interpretar a informação.	15,40	84,60	3,08
6.	…fez perguntas que me permitiram criar as minhas próprias ideias.	30,70	65,40	2,81
7.	…fez perguntas que me obrigaram a justificar a minha resposta.	11,50	88,40	3,08

8.	…fez perguntas para verificar se eu tinha compreendido.	26,90	73,10	3,04

Nota. 3,8% dos alunos não responderam a III.6

Quando analisado o ponto de vista dos alunos relativamente à intenção das perguntas colocadas, constata-se que os alunos tendem a concordar que foram colocadas perguntas de todos os níveis cognitivos presentes na categorização referida. No entanto, ressalta uma maior concordância por parte dos alunos quanto à formulação de perguntas que obrigam a interpretar informação (Pensamento Convergente), perguntas que obrigam a justificar a resposta (Pensamento Avaliativo) e perguntas de verificação da compreensão (Rotina). Já ao analisar as perguntas colocadas, com base nas transcrições das mesmas, a quantidade de perguntas de baixo nível cognitivo (Conhecimento-Memória, Pensamento Convergente) é bastante mais significativa do que as perguntas de nível cognitivo alto (Pensamento Divergente e Pensamento Avaliativo).

Por forma a compreender se a utilização de um método de resolução de problemas teria ficado consolidado pelos alunos, foram analisados os valores resultantes das respostas dos alunos relativamente à terceira subparte da Parte III:

Quadro 23. Medidas de localização e dispersão das respostas dos alunos relativamente aos processos de resolução de problemas (Parte III)

A professora estagiária…		Discordantes	Concordantes	Média
9.	…fez perguntas que me ajudaram a compreender os problemas propostos.	23,10	73,00	2,96
10.	…fez perguntas que me ajudaram a construir uma estratégia para a resolução dos problemas propostos.	30,80	69,20	2,73
11.	…fez perguntas que me ajudaram a resolver os problemas propostos.	19,20	80,70	2,88
12.	…fez perguntas que me permitiram encontrar estratégias para confirmar as soluções obtidas.	23,10	76,90	2,88

Nota. 3,8% dos alunos não responderam a III.9

Relativamente às perguntas formuladas para a condução dos alunos no seguimento do método de Resolução de Problemas de Polya, observa-se que os alunos consideraram que as perguntas colocadas tiveram impacto na construção do método referido. Analisando os resultados, é possível depreender que existiu um cuidado especial com a colocação de perguntas aquando da resolução de problemas.

Tendo como base Adedoyin (2010), foram feitas algumas afirmações para obter o nível de concordância dos alunos, relativamente a características gerais do questionamento praticado, de forma a procurar identificar as falhas do mesmo, sob a perspetiva dos alunos.

Quadro 24. Medidas de localização e dispersão das respostas dos alunos relativamente ao desempenho, em geral, da professora estagiária (Parte III)

A professora estagiária…		Discordantes	Concordantes	Média
13.	…fez perguntas que compreendi sempre.	73,10	26,90	2,31
14.	…deu tempo para pensar e responder às perguntas que colocava.	15,30	84,60	2,96
15.	…fez perguntas que fizeram com que eu prestasse mais atenção às aulas.	38,50	61,50	2,73
16.	…colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de participar nas aulas.	53,80	46,20	2,50
17.	…colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de fazer mais perguntas.	46,20	53,80	2,58
18.	…colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de aprender Matemática.	50,00	50,00	2,46
19.	…fez perguntas que me ajudaram a obter melhores resultados em momentos de avaliação.	42,30	57,7	2,65
20.	…fez perguntas que ajudaram no desenvolvimento da minha aprendizagem.	15,40	84,60	2,96

A última subparte compreende várias características do questionamento pelo que cada uma das afirmações será analisada individualmente, uma vez que esta subparte é a que reúne menos consenso entre os alunos.

Relativamente ao entendimento das perguntas colocadas, os alunos, na sua maioria, consideram que a compreensão das perguntas formuladas nem sempre foi alcançada, discordando em cerca de 73% da afirmação "A professora estagiária fez perguntas que compreendi sempre" (III.13).

Quando confrontados com a afirmação "A professora estagiária deu tempo para pensar e responder às perguntas que colocava" (III.14), quase 85% dos alunos concordaram. Revela-se assim um aspeto positivo no questionamento praticado dado que, muitas das vezes, a falta de interação professor-aluno durante a aula se deve ao facto do professor não dar tempo suficiente para os alunos interligarem toda a informação necessária para responder à pergunta colocada (Neri de Souza, 2006).

No que diz respeito à influência das perguntas que formulei no incremento da atenção dos alunos (III.15), cerca de 60% destes consideraram que as perguntas tiveram uma influência positiva.

As afirmações que se seguem (III.16, III.17, III.18 e III.19) apresentam valores de concordância e discordância muito equitativos pelo que a sua análise será mais cuidada, tendo em conta a preferência dos alunos pela disciplina de Matemática.

Quadro 25. Diferenças entre as respostas dos alunos à afirmação III.16 quando divididos por preferência pela disciplina

		Das três disciplinas que mais gostas a Matemática está incluída?	
		Sim	**Não**
A professora estagiária colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de participar nas aulas.	**Discordantes**	33,3%	64,7%
	Concordantes	66,7%	35,3%

Ao observar os resultados, constata-se que os alunos que contemplam a Matemática nas suas três disciplinas preferidas consideram, na sua maioria, que as perguntas colocadas tiveram um impacto positivo na sua vontade de participar nas aulas. Por outro lado, os alunos que não inserem a Matemática nas suas disciplinas prediletas, não encontram nenhuma influência das perguntas colocadas na sua vontade de participar nas aulas.

Quadro 26. Diferenças entre as respostas dos alunos à afirmação III.17 quando divididos por preferência pela disciplina

		Das três disciplinas que mais gostas a Matemática está incluída?	
		Sim	**Não**
A professora estagiária colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de fazer mais perguntas.	**Discordantes**	33,3%	52,9%
	Concordantes	66,7%	47,1%

Quanto ao despertar da vontade de formular mais perguntas em sala de aula, os resultados assemelham-se aos anteriores, constatando-se que os alunos que gostam da disciplina de Matemática se sentiram mais motivados ao formular perguntas, enquanto que os restantes alunos apresentaram uma leve tendência discordante no que diz respeito ao impacto das perguntas formuladas no seu próprio questionamento.

Quadro 27. Diferenças entre as respostas dos alunos à afirmação III.18 quando divididos por preferência pela disciplina

		Das três disciplinas que mais gostas a Matemática está incluída?	
		Sim	**Não**
A professora estagiária colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de aprender Matemática.	**Discordantes**	22,2%	64,7%
	Concordantes	77,8%	35,3%

Relativamente à vontade de aprender Matemática, as diferenças entre os dois grupos analisados são notórias. Se por um lado, os alunos que atribuem um favoritismo à disciplina de Matemática consideram que tiveram mais vontade de aprender Matemática, numa percentagem de 77,8%, por outro lado, o segundo grupo de alunos discorda do despertar desta vontade como consequência do questionamento praticado.

Quadro 28. Diferenças entre as respostas dos alunos à afirmação III.19 quando divididos por preferência pela disciplina

		Das três disciplinas que mais gostas a Matemática está incluída?	
		Sim	**Não**
A professora estagiária fez perguntas que me ajudaram a obter melhores resultados em momentos de avaliação.	**Discordantes**	33,3%	47,1%
	Concordantes	66,7%	52,9%

Embora a percentagem de concordantes e discordantes da afirmação “A professora estagiária fez perguntas que me ajudaram a obter melhores resultados em momentos de avaliação” (III.19) se aproximasse uma da outra, quando feita a análise dividindo a opinião dos alunos que gostam e dos que não gostam da disciplina de Matemática, constata-se que a maioria dos alunos, independentemente do gosto pela disciplina, concorda com a afirmação, sendo o nível de concordância mais expressivo no grupo de alunos que gosta da disciplina.

No que diz respeito à última afirmação, “A professora estagiária fez perguntas que ajudaram no desenvolvimento da minha aprendizagem” (III.20), cerca de 85% dos alunos concordam e 15% não concordam, podendo-se assim afirmar que, no geral, na opinião dos alunos, o questionamento praticado por mim resultou num impacto positivo na aprendizagem dos alunos.

Posto isto, várias são as conclusões que podemos retirar com a análise dos resultados fruto da aplicação do questionário aplicado aos alunos. Os alunos consideram que, no geral, são colocadas muitas perguntas na aula de matemática independentemente da natureza dos momentos criados. No entanto, segundo a sua opinião, o tempo que é despendido pelos professores ao formular perguntas não é um aspeto negativo na medida em que é também da opinião dos alunos que as perguntas contribuem para o seu desenvolvimento, aprendizagem e desempenho a nível escolar.

Sob o ponto de vista dos alunos, foram formuladas perguntas com diferentes níveis cognitivos, o que contrasta com as conclusões feitas com base na análise das aulas transcritas que aponta para uma maior quantidade de perguntas de baixo nível cognitivo. Esta divergência levanta a questão relativa ao processo reflexivo de um professor acerca da sua prática em comparação com a forma como os alunos veem essa mesma prática.

Em suma, e considerando os dados analisados, os alunos que contemplam a disciplina de Matemática nas suas disciplinas favoritas, tendem a considerar que as perguntas colocadas se tornaram num elemento estruturador da sua motivação para aprender matemática, refletindo-se nos momentos de avaliação e na sua própria aprendizagem.

Conclusões

Neste capítulo, começo por apresentar as principais conclusões provenientes da análise realizada sobre os dados recolhidos, procurando relacionar os resultados com as questões de investigação, inicialmente formuladas. Posto isto, faço uma reflexão final do meu percurso, apresentando as limitações do estudo e as aprendizagens realizadas.

Recorde-se que o presente estudo tinha como principais finalidades identificar as minhas dificuldades ao formular perguntas em contexto de aula e aperfeiçoar o meu questionamento. Para isso, recolhi dados através do registo áudio e vídeo de aulas dadas, notas de campo e a aplicação de um inquérito por questionário aos alunos, com o objetivo de responder às questões de investigação orientadoras do estudo.

i. Quais as minhas principais dificuldades ao formular perguntas?

Para responder a esta questão, recorri às notas de campo elaboradas por mim e às notas de campo elaboradas pelas orientadoras do estudo, de forma a, em primeira instância, fazer a identificação das falhas cometidas na minha prática docente. Deste modo, na primeira fase do estudo, correspondente à identificação da problemática a estudar, foquei-me nos aspetos menos positivos da minha prestação, concluindo, logo na reflexão pessoal da segunda aula dada, que a minha maior dificuldade era formular perguntas corretamente e que apresentassem um nível cognitivo adequado ao nível de escolaridade e à natureza do momento.

Ao identificar o problema, procurei estratégias que possibilitassem melhorar a minha prática, percebendo que as planificações anteriores eram munidas de deficiências que careciam de aperfeiçoamentos, nomeadamente ao nível do planeamento de perguntas-chave que me permitissem orientar a aula. Com isto, a construção das planificações começou a sofrer alterações, conduzindo a um questionamento mais rico aquando da sua implementação na sala de aula.

Ao planificar aulas que envolviam a Resolução de Problemas, considerei necessário pesquisar acerca das perguntas adequadas a cada fase do procedimento de Resolução de

Problemas, conseguindo dessa forma estruturar planificações mais coerentes com as naturezas inerentes a cada aula. Também esta pesquisa se tornou num elemento influenciador das minhas práticas docentes, nomeadamente no que diz respeito ao questionamento. Na aula de preparação para o Teste Intermédio denotou-se uma preocupação constante em inicializar a resolução de cada tarefa formulando uma pergunta dentro da etapa da compreensão do problema. Por outro lado, a última etapa, que diz respeito à confirmação da solução, fica muitas vezes comprometida. A razão deste último reparo não é coerente com os dados recolhidos.

Por forma a obter dados mais concretos acerca do meu questionamento, optei por realizar registos áudio e vídeo de aulas. Em consequência, surgiu mais um resultado relevante: o número de perguntas formuladas de nível cognitivo baixo é bastante superior ao número de perguntas formuladas de nível cognitivo superior. Esta conclusão já tinha sido verificada em alguns estudos sobre a temática do questionamento praticado pelo professor, referidos no Capítulo 2 deste trabalho. Também Pedrosa de Jesus (1987) concluiu que a maioria das perguntas formuladas pelo professor eram de nível cognitivo baixo.

No entanto, considero que as perguntas de baixo nível cognitivo são essenciais para o desenvolvimento de uma aula, partilhando da mesma opinião proferida por Coutinho (2012),

> "[…] tanto as perguntas de alto nível cognitivo como as de baixo nível cognitivo podem levar a aprendizagens significativas e desempenham um papel essencial no desenvolvimento da capacidade de questionar. Assim, as perguntas de baixo nível cognitivo são muitas vezes o ponto de partida para estabelecer factos básicos e entendimentos fundamentais, essenciais para posteriormente formular questões mais complexas." (p. 82)

Em suma, além de identificadas as principais dificuldades ao formular perguntas em contexto de aula, foi existindo uma preocupação constante em melhorar essa prática. Esta preocupação traduziu-se numa melhoria constante ao longo do tempo, o que revela uma consequência bastante positiva do processo implementado. De mais a mais, as finalidades que me propus alcançar na fase inicial do estudo foram, deste modo, atingidas.

ii. Os objetivos planificados para cada aula coincidem com os objetivos alcançados nessa mesma aula?

Perante esta questão de investigação, senti a necessidade de analisar as aulas de forma distinta aquando da análise detetora de alterações no meu questionamento.

No decorrer da primeira fase, e sob um ponto de vista mais geral, verificou-se que a última aula dada não cumpriu todos os objetivos delineados. Mais se verificou que a aula em causa revelou-se mais descuidada a todos os níveis, incluindo na sua preparação. Destas inferências poder-se-á concluir que uma preparação de aula defeituosa influencia a sua implementação. Nas palavras de Évora (2005),

> "a realização de uma planificação adequada permite mais oportunidades educativas aos alunos, permite uma classe organizada e também um maior número de atividades durante a aula, melhorando assim a qualidade do processo ensino/aprendizagem e o desempenho do seu agente ativo (o professor)." (p. 10)

Nesta linha orientadora, a planificação cuidada foi uma preocupação tida em consideração na preparação das aulas seguintes. Na segunda fase, verificou-se que os objetivos delineados, quer gerais quer específicos, foram cumpridos, existindo apenas uma exceção na segunda aula dada que se deveu à falta de tempo para terminar uma tarefa.

Importa ainda referir os resultados verificados com a última aula dada, na qual se verificou uma rigidez e algum apego à planificação, não deixando a aula fluir com naturalidade. Para Barroso (2013),

> "Os professores em início de carreira ou mesmo durante a sua formação inicial têm a tendência a utilizar uma planificação linear, rígida, diretiva e detalhada, pois ainda não se sentem confortáveis e seguros no seu papel […]. Consequentemente, estes docentes sentem mais dificuldades em se desprender dos seus planos, de se darem ao imprevisto, mostrando uma menor flexibilidade e consideração pelas necessidades dos alunos" (pp. 18-19)

Em forma de remate final, é possível concluir que, em geral, os objetivos delineados foram alcançados, havendo algumas exceções esporádicas que se foram dissolvendo ao longo do tempo, demonstrando mais uma vez o que considero uma melhoria nas minhas práticas docentes.

iii. Qual o entendimento dos alunos acerca do questionamento praticado por mim para o desenvolvimento das suas aprendizagens?

Sendo os alunos, e neste caso, a turma participante, um dos elementos fundamentais para o estudo, considerei pertinente perceber se as minhas práticas de formulação de perguntas se adequavam, sob o seu ponto de vista. Para isso, elaborei um questionário, com objetivos específicos, e apliquei-o à turma na qual recolhi dados mais concretos acerca do meu questionamento.

Deste modo, foi-me possível concluir que embora os alunos considerem que, em geral, são feitas muitas perguntas nas aulas de Matemática, estas são um elemento fundamental para o processo de ensino-aprendizagem. Quando divididos em dois grupos (alunos que comtemplam a Matemática nas suas três disciplinas preferidas e os que não consideram), denota-se uma diferença nas suas opiniões, constatando-se que os alunos que gostam da disciplina de Matemática declaram que as perguntas que coloquei nas aulas que lhes dei foram importantes para o seu desenvolvimento. Esta conclusão vai em oposição às conclusões realizadas por Adedoyin (2010) no seu estudo que visava compreender se os alunos acham que as perguntas formuladas pelos professores têm efeitos na sua aprendizagem na disciplina de Matemática. Na investigação do autor, pode-se ainda verificar que as conceções acerca deste tema diferem consoante o sexo dos alunos, enquanto que no presente estudo, as dissemelhanças de opiniões dão-se conforme o gosto pela disciplina de Matemática. De outra forma, e tendo em conta a investigação realizada por Moreira (2012), os alunos consideraram que existe "um bom ambiente de questionamento nas aulas" (p. 161), confirmando as conclusões que o presente estudo permitiu retirar.

Em síntese, penso que, sob o ponto de vista dos alunos, o questionamento aplicado pela minha pessoa foi eficiente apesar de, por vezes, nem toda a turma compreender os objetivos de cada pergunta, traduzindo-se na perda da sua atenção e motivação para as aulas de Matemática. É ainda curioso verificar que estes alunos são os que não contemplam a Matemática nas duas três disciplinas preferidas o que me leva a atribuir uma significância especial a estes alunos e me dá aspiração de alterar a sua motivação e o seu gosto para e pela disciplina.

Reflexão Final

Neste subcapítulo irei apresentar não apenas uma reflexão pessoal acerca deste trabalho, como também algumas dificuldades sentidas e limitações do estudo.

Na minha opinião, a metodologia utilizada foi adequada ao que eu pretendia com o trabalho. Foquei-me, essencialmente, na minha prática docente, identificando as minhas maiores falhas no sentido de as aperfeiçoar e me tornar numa melhor profissional na área do ensino. Nesta linha de orientação, os resultados encontrados não podem ser generalizados, uma vez que o estudo se centra no questionamento praticado por uma professora estagiária, neste caso, eu própria, e os dados recolhidos são apenas de uma das turmas às quais a referida professora deu aulas.

A base teórica do meu trabalho foram os estudos da professora Helena Pedrosa, nomeadamente as suas investigações de mestrado e doutoramento, uma vez que são trabalhos focalizados no questionamento e na pergunta do professor, apresentando conclusões que me permitiram analisar a minha própria prática.

Com a análise das aulas, e principalmente, seguindo os indicadores de idoneidade didática propostos por Godino (2009, 2011), considero que refleti sobre aspetos que me proporcionaram a melhoria das minhas práticas. Nomeadamente, ao nível do questionamento, refleti sobre a formulação de perguntas, revelando os principais erros de linguagem e, deste modo, consegui alterar a minha oralidade no sentido de alcançar o rigor cientifico necessário para os níveis de ensino que me inseri. Também as planificações das aulas foram sofrendo alterações por forma a melhorar as minhas dinâmicas em contexto de aula. Neste sentido, concordo com Barroso (2013) quando a autora afirma que “O professor deve pensar a sua prática, saber o que pretende com o processo ensino-aprendizagem e como o irá desenvolver” (p. 18). De facto, é muito importante conhecer e definir os conteúdos a abordar de forma a delinear uma estratégia que permita ir ao encontro das capacidades a trabalhar e dos objetivos a atingir.

Uma das minhas maiores dificuldades durante a planificação das aulas foi estabelecer tempos para os diferentes momentos, uma vez que, para além de não ter prática, não saberia como os alunos reagiriam a determinada tarefa. Neste caso, a professora responsável pela turma assumiu um papel importantíssimo pois auxiliou-me a planear os momentos das aulas de forma a que não existissem momentos a mais ou a menos. Desta forma, considero que a gestão de tempo durante as aulas foi bastante mais fácil, sendo os planos seguidos, na sua maioria, em pleno.

No seguimento da temática que envolve a planificação de aulas, também senti algumas dificuldades, embora não tão acentuadas, em selecionar tarefas variadas quanto às situações, quanto à natureza e representativas da temática a abordar. O meu objetivo foi sempre trabalhar com os alunos no sentido de lhes proporcionar ferramentas de abordagem às tarefas pois considero que, tal como Ponte et. al (1999) afirmam "O papel do professor é assegurar que os alunos compreendam a natureza da tarefa e escolham estratégias pertinentes para lidar com ela, apoiando-os se eles revelarem dificuldades" (p. 39).

Durante toda a análise da minha prática, focando-me na formulação de perguntas, senti que foram faltando elementos de análise. O facto de não ter recebido todas as autorizações dos Encarregados de Educação do 11.º ano não possibilitou o registo áudio das aulas o que influenciou negativamente a recolha de dados. Na última aula registada em suporte áudio e vídeo, os dados ficaram comprometidos pois a qualidade do registo não foi a melhor, perdendo-se elementos, nomeadamente a resolução da última tarefa proposta. Também o facto de não ter delineado uma estratégia para a elaboração deste trabalho antecipadamente contribuiu para uma análise menos exaustiva das aulas dadas na primeira fase. É certo que foi nessa fase que se deu a identificação da problemática, no entanto, considero que, desde as primeiras aulas foi possível constatar as minhas principais dificuldades na formulação de perguntas adequadas, pelo que poderia ter delineado a metodologia a adotar.

Uma outra dificuldade que senti foi a elaboração de notas de campo. Embora tivesse as notas de campo de três elementos que assistiram às aulas, considero que as notas de campo do próprio professor podem trazer diferentes perspetivas da implementação das aulas. Numa dinâmica de aula é muito complicado conciliar a função de professora com a função de observadora e, neste caso, investigadora.

Relativamente à opinião que os alunos têm acerca do meu questionamento, penso que deveria ter feito entrevistas, pelo menos, a alguns alunos para melhor compreender os resultados do questionário aplicado. No entanto, as autorizações dos Encarregados de Educação para a aplicação do questionário demoraram imenso tempo a ser conseguidas, atrasando assim a implementação do questionário. Deste modo, a entrevista só seria possível caso houvesse mais tempo.

Outra limitação que vem no seguimento da anterior, foi o tempo. Na minha opinião, o ano de estágio que realizamos é pouco com tanto para aprender. Também a planificação da escola e a realização de testes intermédios acaba por afetar a planificação cronológica que inicialmente idealizamos. Neste sentido, posso já sugerir um estudo idêntico que avalie as melhorias de um professor nos seus primeiros anos de ensino ao nível da formulação de perguntas, e que assente, essencialmente, nas reflexões do próprio.

Em termos profissionais, a unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada permitiu-me aplicar todos os conhecimentos teóricos construídos ao longo do ciclo de estudos, desenvolvendo assim as minhas competências enquanto docente.

Referências Bibliográficas

Abrantes, M. (2005). *O desenvolvimento da reflexividade no contexto do discurso supervisivo*. Tese de doutoramento. Aveiro: Universidade de Aveiro. Acesso a 19 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/1hDsFD2

Adedoyin, O. (2010). An investigation of the effects of teachers' classroom questions on the achievement of the students in mathematics: case study of botswana community junior secondary school. *European Journal of Educational Studies*, *2*(3), 313–329. Acesso a 29 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/1hMnctk

Almeida, P. (2007). *Questões dos alunos e estilos de aprendizagem – um estudo com um público de Ciências no ensino universitário*. Tese de doutoramento. Aveiro: Universidade de Aveiro. Acesso a 17 de dezembro de 2013 em http://bit.ly/1himeVx

Almeida, P. A. (2010). Questioning patterns and teaching strategies in secondary education. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 751–756. doi:10.1016/j.sbspro.2010.03.096

Barros, P. T. de. (2008). *O Questionamento do Supervisor e dos Docentes nas Sessões de Formação Contínua: uma estratégia de reflexão sobre a praxis*. Universidade de Aveiro. Acesso a 17 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/1gVMggP

Barroso, D. da S. (2013). *A importância da planificação no processo ensino-aprendizagem nas aulas de História e Geografia*. Dissertação de mestrado. Porto: Universidade do Porto. Acesso a 26 de outubro de 2014 em http://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/71580

Bodgan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Chin, C. (2006). Teacher Questioning in Science Classrooms : What Approaches Stimulate Productive Thinking? *International Science Education Conference*, 183–192. Acesso a 8 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/1geZkxI

Coutinho, M. (2012). *Estratégias potenciadoras do questionamento em ciências naturais*. Dissertação de mestrado. Aveiro: Universidade de Aveiro. Acesso a 7 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/1a6d7Ct

Damião, H., Festas, I., Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). Programa e Metas Curriculares. Matemática. Ensino Básico. Ministério da Educação e da Ciência. Acesso a 13 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/1gC6f4f

Domingues, C., & Martinho, M. H. (2012). Desenvolvimento do raciocinio matemático e as práticas de comunicação numa aula. *Práticas de Ensino da Matemática* (pp. 321–334).

Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM). Acesso a 11 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/JPXsk9

Durozoi, G., & Roussel, A. (1997). *Dicionário de Filosofia*. Porto: Porto Editora.

Évora, S. R. F. (2005). *Análise de planos de aulas dos estagiários da FCDEF - um estudo comparativo dos elementos do currículo*. Dissertação de mestrado. Coimbra: Universidade de Coimbra. Acesso a 26 de outubro de 2014 em http://hdl.handle.net/10316/15339

Ferraz, A. P. do C. M., & Belhot, R. V. (2010). Taxonomia de Bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais. *Gest. Prod., São Carlos*, *17*(2), 421–431. Acesso a 26 de agosto de 2014 em http://www.scielo.br/pdf/gp/v17n2/a15v17n2.pdf

Ferreira, A. (2010). *Questionamento dos Professores: o seu contributo para a integração curricular*. Dissertação de mestrado. Aveiro: Universidade de Aveiro. Acesso a 7 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/1adL5Zm

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20,* 13–31. Acesso a 8 de abril de 2014 em http://bit.ly/1itFvD3

Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. CIAEM-IACME, *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (pp. 1–20). Recife. Brasil. Acesso a 8 de abril de 2014 em http://bit.ly/1lIrQuN

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM. The Internacional Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127–135. doi:10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseña de Las Ciencias*, *27*(1), 59–76. Acesso a 8 de abril de 2014 em http://bit.ly/1qgGb3H

Leal, A. F. S. (2013). *Relatório de Estágio Profissional*. Dissertação de mestrado. Lisboa: Escola Superior de Educação João de Deus. Acesso a 30 de setembro de 2014 em http://comum.rcaap.pt/handle/123456789/4212

Maroco, J., & Garcia-Marques, T. (2006). Qual a fiabilidade do alfa de Cronbach? Questões antigas e soluções modernas? *Laboratório de Psicologia*, *4*(1), 65–90. Acesso a 27 de agosto de 2014 em http://repositorio.ispa.pt/handle/10400.12/133

Martinho, M. H., & Ponte, J. P. da. (2000). A *comunicação na sala de aula de matemática: Um campo de desenvolvimento profissional do professor*. Universidade do Minho; Faculdade de Ciências de Lisboa. Acesso a 11 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/1if6ymp

Martins, J. P. C. (2013). *A resolução de problemas matemáticos e a aprendizagem autorregulada dos alunos*. Dissertação de mestrado. Beja: Instituto Politécnico de Beja. Acesso a 24 de setembro de 2014 em https://repositorio.ipbeja.pt/handle/123456789/605

Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão panorâmica da investigação-acção*. Porto: Porto Editora.

Medeiros, R. M. (2000). *O questionamento na sala de aula: sua relevância no desenvolvimento de estratégias de supervisão*. Dissertação de mestrado. Aveiro: Universidade de Aveiro. Acesso a 1 de fevereiro de 2014 em http://bit.ly/1nAHKsT

Menezes, L. (1996). A comunicação na aula de Matemática. *A Didática Na Formação Para O Desenvolvimento Profissional Dos Professores*, *Millenium*, 20–28. Acesso a 8 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/YIQqE3

Ministério da Educação e Ciência. (2014). GAVE. *Testes Intermédios*. Acesso a 6 de abril de 2014 em http://www.gave.min-edu.pt/np3/430.html

Moreira, A. (2012). *O questionamento no alinhamento do ensino, aprendizagem e avaliação*. Tese de doutoramento. Aveiro: Universidade de Aveiro. Acesso a 17 de dezembro de 2013 em http://bit.ly/1dl65Mn

Moreira, C. A. P. (2004). *Ciência - Tecnologia - Sociedade. Implicações para o processo Ensino/Aprendizagem decorrentes da planificação, comunicação e avaliação em projecto CTS, com alunos do 3.º e 4.º ano e professores do 1.º CEB*. Dissertação de mestrado. Braga: Universidade do Minho. Acesso a 30 de setembro de 2014 em http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/2765

NCTM. (2008). *The Role of Technology in the Teaching and Learning of Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Acesso a 30 de junho de 2014 em http://bit.ly/V4GUdY

Neri de Souza, F. (2006). *Perguntas na aprendizagem de Química no Ensino Superior*. Tese de doutoramento. Aveiro: Universidade de Aveiro. Acesso a 17 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/1mheEOy

Neri de Souza, F., & Moreira, A. (2010). Perfis de Questionamento em Contextos de Aprendizagem Online. *Revista Iberoamericana de Informática Educativa*, *Número 12*(Artículos), 15–25.

Pardal, L., & Correia, E. (1995). *Métodos e técnicas de investigação social*. Porto: Areal.

Pedrosa de Jesus, M. H. (1987). *A descriptive study of some science teachers questioning practices*. Dissertação de mestrado não publicada. U.K.: University of East Anglia.

Pedrosa de Jesus, M. H. (1991). *An investigation of pupils' questions on Science teaching*. Tese de doutoramento não publicada. U.K.: University of East Anglia.

Pedrosa de Jesus, M. H. (2000). A comunicação na sala de aula: As perguntas como elementos estruturadores da interação didática. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J. Ponte, & J. Mato (Eds.), *Interações na aula de Matemática* (pp. 149–161). Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Pedrosa de Jesus, M. H., Sá Correia, M. J., & Abrantes, M. M. (2005). A importância do questionamento no desenvolvimento da competência reflexiva em contextos de supervisão. *XIV Colóquio da AFIRSE | Para um Balanço da Investigação em Educação de 1960 a 2005. Teorias e Práticas Actes* (pp. 1–11). Lisboa: Faculdade de Psicologia e Ciências de Educação da Universidade de Lisboa. Acesso a 7 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/1kpkGhC

Pereira, A. L. P. (2002). Problemas matemáticos: caracterização, importância e estratégias de resolução. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Acesso a 9 de março de 2014 em http://bit.ly/1inSHd8

Ponte, J. P. da. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105–132. Acesso a 24 de outubro de 2014 em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte (Estudo caso).pdf

Ponte, J. P. da, Ferreira, C., Varandas, J. M., Brunheira, L., & Oliveira, H. (1999). *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Associação de Professores de Matemática (1ª edição.). Lisboa: Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P. da, Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., … Viseu, F. (2007a). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, *20*(2), 39–74. Acesso a 11 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/KNr6Xy

Ponte, J. P. da, Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., … Oliveira, P. A. (2007b). Programa de Matemática do Ensino Básico. *Ministério Da Educação Direção-Geral Da Inovação E Do Desenvolvimento Curricular*. Ministério de Educação; Direção-Geral da Inovação e do Desenvolvimento Curricular. Acesso a 23 de dezembro de 2013 em http://www.apm.pt/files/205600_programamatematica_518e3b2abd90d.pdf

Priberam Informática S.A. (2013). Priberam Dicionário. Acesso a 14 de janeiro de 2014 em http://www.priberam.pt/DLPO/

Reis, P. (2011). *Observação de Aulas e Avaliação do Desempenho Docente*. (C. C. para a A. de Professores, Ed.) (Ministério.). Lisboa. Acesso a 24 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/1hAzO6G

Sardo, L. M. P. da N. (2010). *Os desafios do professor no século XXI : as suas competências profissionais no cumprimento da missão da escola*. Dissertação de mestrado. Coimbra: Universidade de Coimbra. Acesso a 22 de agosto de 2014 em http://hdl.handle.net/10316/15632

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C., & Lopes, I. M. C. (2002). Programa de Matemática A (Ensino Secundário). Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário. Acesso a 29 de março de 2014 em http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinosecundario

Wellington, J. (2000). *Teaching and learning secondary science: contemporary issues and pratical approaches.* New York: Routledge. Acesso a 6 de janeiro de 2014 em http://bit.ly/1fc0EVn

Anexos

Anexo 1 – Guião para o questionamento proposto por Wellington

Table 5.3 Guidelines for questioning

Preparing and phrasing questions

- Prepare key questions in advance, using the categories above.
- Relate the questions to the aims of the lesson.
- Phrase the questions clearly and at the right language level.
- Avoid ambiguous wording.
- Beware of 'nonsense' questions, for example 'Why does a pig have four legs?'; general questions, for example 'Where can we find sea-water', and other questions that invite stupid answers, for example 'What do you all do at least once a day?'.
- Make sure that questions are carefully sequenced.

Presenting and delivering questions

- Position yourself and the class carefully – ensure that you can see and be seen.
- Insist on the use of hands rather than shouting out.
- Spread questions around the class – look for a balance, such as back and front, male and female.
- Use pupils' names in directing and responding to questions.
- Draw ideas out from the pupils – don't give too much too soon.
- If the classroom situation allows it, keep probing and prompting in order to extend pupils' thinking, for example 'What do you mean by that . . .?', 'And then what might happen . . .?', 'What makes you say that . . .?', and so on.

Accepting and dealing with responses

- Be ready to record responses on a board, OHP or flip chart. This is a form of reward as well as a useful record, for example, of predictions.
- Use body language, such as nods, hand gestures, smiles, to encourage pupils to respond.
- Praise responses even if the answer to a closed question is incorrect – don't condemn answers to open questions purely because they don't coincide with what's in your head.
- Give leads and hints if responses are not forthcoming, perhaps by rephrasing and redirecting the question.
- Don't embarrass or humiliate by waiting too long for a response.
- Don't allow others to ridicule a pupil for an incorrect answer to a closed question or a strange answer to an open one.
- Open questions, although educationally desirable, lead to responses which can be far harder to manage and control than closed ones, such as long monologues from pupils or totally unexpected or zany replies. Developing a good questioning technique that includes asking and responding to open questions takes time and reflection.

Anexo 2 – Fases do estudo

Fases do estudo	Setembro 2013	Outubro 2013	Novembro 2013	Dezembro 2013	Janeiro 2014	Fevereiro 2014	Março 2014	Abril 2014	Maio 2014	Junho 2014	Julho 2014	Agosto 2014	Setembro 2014	Outubro 2014
Escolha do tema														
Identificação da problemática														
Leituras flutuantes acerca do tema														
Pesquisa														
Escolhas metodológicas e procedimentais														
Recolha de dados														
Tratamento e análise dos dados														
Conclusões														
Revisão do estudo														

Anexo 3 – Autorização aos Encarregados de Educação

Autorização para áudio e vídeo gravar

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação,

Eu, Micaela Martins, estou neste momento, a frequentar o 2.º ano do Mestrado em Ensino de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário na Universidade de Aveiro, pelo que me encontro na situação de professora estagiária na turma do seu educando.

Para a conclusão do referido mestrado, é necessária a realização de um Relatório Final, o qual, no meu caso, incidirá sobre um estudo acerca das perguntas que o professor de Matemática formula em contexto de sala de aula. O estudo que pretendo realizar exige o registo vídeo e áudio das aulas, sendo o foco do estudo as perguntas que a professora coloca.

Para o efeito, solicito a V. Ex.(a) autorização para fazer os registos referidos, em algumas aulas de Matemática do seu educando, no decorrer dos 2.º e 3.º Períodos do presente ano letivo.

Declaro que os dados recolhidos serão apenas usados para efeitos do estudo a realizar e não terão qualquer influência nas classificações escolares dos alunos. Também a planificação estabelecida no início do ano letivo não sofrerá alterações e comprometo-me a garantir o anonimato em relação à identidade dos alunos, assim como em relação à escola que frequentam.

Na expectativa de uma resposta favorável, solicito que assine a autorização em baixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la.

Com os melhores cumprimentos,

____

(Micaela Martins, a professora estagiária de Matemática)

Com o conhecimento de,

____

(Isabel Órfão, a professora de Matemática)

....

Eu, ____, Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a) ____, n.º ____, turma ____, autorizo o registo vídeo e áudio das aulas de Matemática necessárias para a realização do Relatório Final de Micaela Martins (professora estagiária), no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário.

____/____/____

____

(Encarregado(a) de Educação)

Autorização para aplicar o questionário

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Micaela Martins, estou neste momento, a frequentar o 2.º ano do Mestrado em Ensino de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário na Universidade de Aveiro, pelo que me encontro na situação de professora estagiária na turma do seu educando.

Pretendo dar seguimento ao meu Relatório Final que, como já explicado anteriormente, incidirá sobre um estudo acerca das perguntas que o professor de Matemática formula em contexto de sala de aula. O estudo que pretendo realizar exige que os alunos respondam a um breve questionário, o qual será entregue numa aula de Matemática, não ocupando mais do que cinco minutos da mesma. O questionário em causa visa obter as perceções dos alunos sobre as perguntas do professor de Matemática, nomeadamente as minhas (professora estagiária).

Para o efeito, solicito a V. Ex.(a) autorização para recolher as respostas do seu educando ao questionário.

Declaro que os dados recolhidos serão apenas usados para efeitos do estudo a realizar e não terão qualquer influência nas classificações escolares dos alunos. Asseguro desde já a confidencialidade da informação disponibilizada assim como o anonimato em relação à identidade dos alunos.

Na expectativa de uma resposta favorável, solicito que assine a autorização em baixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la.

Com os melhores cumprimentos,

____

(Micaela Martins, a professora estagiária de Matemática)

Com o conhecimento de,

____

(Isabel Órfão, a professora de Matemática)

…………………………………..…………………………………………………………..….

Eu, ____, Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a) ____, n.º ____, turma ____, autorizo a recolha das respostas do meu educando ao questionário para realização do Relatório Final de Micaela Martins (professora estagiária), no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário.

____/____/____

____

(Encarregado(a) de Educação)

Anexo 4 – Questionário aos alunos

QUESTIONÁRIO

O presente questionário visa obter as perceções de alunos de Matemática do Ensino Básico sobre as perguntas da professora estagiária em sala de aula. Agradeço a tua colaboração e asseguro desde já a confidencialidade da informação disponibilizada assim como o teu anonimato.

Agradeço que respondas a este questionário de forma mais sincera possível.

Micaela Martins, maio de 2014

I. Caraterização dos respondentes

1.1. Género:

- ☐ Masculino
- ☐ Feminino

1.2. Idade: _______________

1.3. Das três disciplinas que mais gostas a matemática está incluída?

- ☐ Sim
- ☐ Não

1.3.1. Porquê?

____

____

____

____

II. As perguntas dos professores de matemática

Na tabela abaixo encontram-se algumas afirmações. Coloca um X na opção que achares mais conveniente. Lembra-te que deves ter em conta os professores de matemática que já tiveste.

DT-Discordo totalmente; **D**-Discordo; **C**-Concordo; **CT**-Concordo totalmente

De um modo geral, os professores de matemática que tens tido…	**DT**	**D**	**C**	**CT**
1. …fazem muitas perguntas durante as aulas.				
2. …desperdiçam muito tempo das aulas a fazerem perguntas.				
3. …fazem perguntas que têm sempre impacto na minha compreensão dos conceitos matemáticos.				
4. …fazem perguntas que influenciam o meu desempenho nas aulas.				
5. …fazem perguntas que são essenciais para que eu seja bem sucedido.				

III. As perguntas da professora estagiária

Na tabela abaixo encontram-se algumas afirmações. Coloca um X na opção que achares mais conveniente. Lembra-te que deves ter em conta apenas as aulas de matemática da professora estagiária.

DT-Discordo totalmente; **D**-Discordo; **C**-Concordo; **CT**-Concordo totalmente

A professora estagiária…	**DT**	**D**	**C**	**CT**
1. …fez muitas perguntas nas aulas.				
2. …fez muitas perguntas nos momentos de resolução de exercícios.				
3. …fez muitas perguntas nos momentos de exposição de conteúdos programáticos.				
4. … fez perguntas que apenas exigiam que eu me lembrasse de factos ou fórmulas.				
5. …fez perguntas que me obrigaram a interpretar a informação.				
6. ...fez perguntas que me permitiram criar as minhas próprias ideias.				
7. ...fez perguntas que me obrigaram a justificar a minha resposta.				
8. ...fez perguntas para verificar se eu tinha compreendido.				
9. ...fez perguntas que me ajudaram a compreender os problemas propostos.				
10. …fez perguntas que me ajudaram a construir uma estratégia para a resolução dos problemas propostos.				

11. …fez perguntas que me ajudaram a resolver os problemas propostos.				
12. …fez perguntas que me permitiram encontrar estratégias para confirmar as soluções obtidas.				
13. … fez perguntas que compreendi sempre.				
14. ...deu tempo para pensar e responder às perguntas que colocava.				
15. …fez perguntas que fizeram com que eu prestasse mais atenção às aulas.				
16. …colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de participar nas aulas.				
17. …colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de fazer mais perguntas.				
18. …colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de aprender Matemática.				
19. …fez perguntas que me ajudaram a obter melhores resultados em momentos de avaliação.				
20. …fez perguntas que ajudaram no desenvolvimento da minha aprendizagem.				

Obrigada pela tua colaboração!

Anexo 5 – Objetivos do questionário aplicado

Parte I - Caracterização dos respondentes		
N.º	**Questão**	**Objetivo**
1	Género	Caracterizar o perfil dos respondentes.
2	Idade	
3	Residência	
4	A Matemática é uma das tuas disciplinas preferidas? Porquê?	Identificar se a disciplina de Matemática faz parte das preferências dos alunos.

Parte II - As perguntas dos professores de matemática			
N.º		**Objetivo**	**Obs.**
	De um modo geral os professores de matemática que tens tido…		
1	...fazem muitas perguntas durante as aulas.	Avaliar o impacto do questionamento.	Com base em Adedoyin (2010)
2	...desperdiçam muito tempo das aulas a fazerem perguntas.		
3	…fazem perguntas que têm sempre impacto na minha compreensão dos conceitos matemáticos.		
4	…fazem perguntas que influenciam o meu desempenho nas aulas.		
5	…fazem perguntas que são essenciais para que eu seja bem-sucedido.		

Parte III - As perguntas da professora estagiária			
N.º		**Objetivo**	**Obs.**
	A professora estagiária…		
1	...fez muitas perguntas nas aulas.	Obter a perceção relativamente à frequência das perguntas.	
2	...fez muitas perguntas nos momentos de **resolução de exercícios**.		
3	...fez muitas perguntas nos momentos de **exposição de conteúdos programáticos**.		
4	...fez perguntas que apenas exigiam que eu me lembrasse de fatos ou fórmulas.	Caraterizar a intenção das perguntas colocadas pela professora estagiária.	Com base na categorização de perguntas adotada.
5	...fez perguntas que me obrigaram a interpretar a informação.		

6	...fez perguntas que me permitiram criar as minhas próprias ideias.		
7	...fez perguntas que me obrigaram a justificar a minha resposta.		
8	...fez perguntas para verificar se eu tinha compreendido.		
9	...fez perguntas que me ajudaram a compreender os problemas propostos.	Perceber se as perguntas colocadas ajudaram os alunos a seguirem um método de resolução de problemas eficaz.	Com base no método de Resolução de Problemas de Polya.
10	…fez perguntas que me ajudaram a construir uma estratégia para a resolução dos problemas propostos.		
11	…fez perguntas que me ajudarame a resolver os problemas propostos.		
12	…fez perguntas que me permitiram encontrar estratégias para confirmar as soluções obtidas.		
13	… fez perguntas que compreendi sempre.	Perceber quais as falhas do questionamento criado em sala de aula.	Com base em Adedoyin (2010)
14	...deu tempo para pensar e responder às perguntas que colocava.		
15	…fez perguntas que fizeram com que eu prestasse mais atenção às aulas.		
16	…colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de participar nas aulas.		
17	…colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de fazer mais perguntas.		
18	…colocou perguntas que fizeram com que eu tivesse mais vontade de aprender Matemática.		
19	…fez perguntas que me ajudaram a obter melhores resultados em momentos de avaliação.		
20	…fez perguntas que ajudaram no desenvolvimento da minha aprendizagem.		

Anexo 6 – Planificação 1: Proporcionalidade Inversa (9.º ano)

Datas previstas: 16, 21 e 23 de outubro de 2013

Primeira aula

Objetivo geral

- Recolher dados experimentais para posterior análise

Estrutura da aula

- Experiência com espelhos para posterior introdução da temática da proporcionalidade inversa.

Recursos

- Atividade – Espelhos
- Um espelho e um autocolante, ambos pequenos, e uma fita métrica
- Lápis ou caneta

Metodologia geral adotada

Devido aos recursos disponíveis e às condições da Escola, foi decidido, depois de ouvir as sugestões da professora responsável pela turma, que a melhor estratégia para implementar a tarefa dos espelhos seria dividir a própria tarefa em fases, ficando assim a recolha de dados numa aula e a análise desses mesmos dados numa aula posterior.

Deste modo, e já que a professora considerou importante fazer uma revisão da função afim antes de iniciar o tema da proporcionalidade inversa, optou-se por realizar a experiência na mesma aula prevista para as revisões.

Assim, dividindo a turma em grupos de quatro ou cinco alunos (perfazendo portanto aproximadamente seis grupos), o planeamento da aula foi o seguinte: enquanto a professora responsável pela turma tirava dúvidas de uma ficha de exercícios individual, previamente entregue, a professora estagiária encaminhava um grupo de cada vez para o local de realização da experiência.

Esta aula pretende desenvolver a capacidade de trabalho de grupo e fomentar o gosto pela Matemática através de uma tentativa de ligação dos alunos com a Matemática, confrontando-os com situações do quotidiano.

<u>Desenvolvimento da aula</u>

Primeira parte:

- Entrada dos alunos e acomodação na sala de aula.
- Escrita do sumário.
- Explicitação da estrutura da própria aula aos alunos, propondo-lhes a formação dos grupos.

Segunda parte:

- Saída dos grupo de trabalho para a realização da experiência – pedir aos alunos para lerem a atividade tentando realizá-la autonomamente.

Aqui é importante frisar que deve ser sempre o mesmo aluno a fazer as medições das distâncias e deve ser sempre o mesmo aluno a deslocar-se para ver a reflexão do autocolante no espelho.

Regresso para a sala de aula, depois do ponto 1 da atividade estar concluído (1. Experiência / Recolha de dados).

Terceira parte:

- Acomodação de toda a turma a sala de aula, para recolher as folhas da atividade, devidamente identificadas.
- Finalização da aula.

Segunda aula

Objetivos gerais

- Analisar situações de proporcionalidade inversa como funções do tipo
$$y = \frac{k}{x}, k \neq 0.$$
- Representar algebricamente situações de proporcionalidade inversa.
- Relacionar as representações algébrica e gráfica das função estudada.
- Resolver e formular problema, e modelar situações utilizando funções (já estudadas).

Estrutura da aula

- Conclusão da atividade relacionada com a experiência dos espelhos.
- Explicitação dos conceitos e propriedades presentes no tema: grandezas inversamente proporcionais, constante de proporcionalidade inversa, função de proporcionalidade inversa, hipérbole.
- Resolução de uma ficha de trabalho.

Recursos

- Atividade – Espelhos
- Lápis ou caneta.
- Computador com *GeoGebra* instalado.
- Ficha de Trabalho.

Metodologia geral adotada

Esta aula pretende retomar a atividade associada à experiência já realizada acerca dos espelhos com o intuito de a terminar.

Pretende-se que os alunos consigam observar a regularidade presente no produto das duas variáveis, encontrando uma expressão algébrica que as relacione e verificando que essa expressão algébrica traduz os dados recolhidos, sendo que esta última conclusão requer um ambiente de geometria dinâmica, no caso, o *GeoGebra*.

Nesta aula, e para que os alunos possam tirar maior proveito da atividade, devem ser formados grupos de dois ou três alunos, isto é, cada grupo de realização da experiência divide-se em dois grupos.

No final da aula, é entregue uma Ficha de Trabalho, variada quanto à natureza das suas tarefas, a qual será para concluir como trabalho de casa, caso não fique concluída na aula.

Desenvolvimento da aula

Primeira parte:

- Entrada dos alunos e acomodação na sala de aula.
  Note-se que é uma sala diferente, já que são necessários computadores para a realização da tarefa de exploração em causa, logo é natural que este ponto seja mais demorado que o usual.
- Escrita do sumário.
- Explicitação da estrutura da própria aula aos alunos, propondo-lhes a formação dos grupos, no caso, a divisão pela metade dos já criados para a realização da experiência.
- Entrega da atividade, a qual veio devidamente identificada da aula anterior.

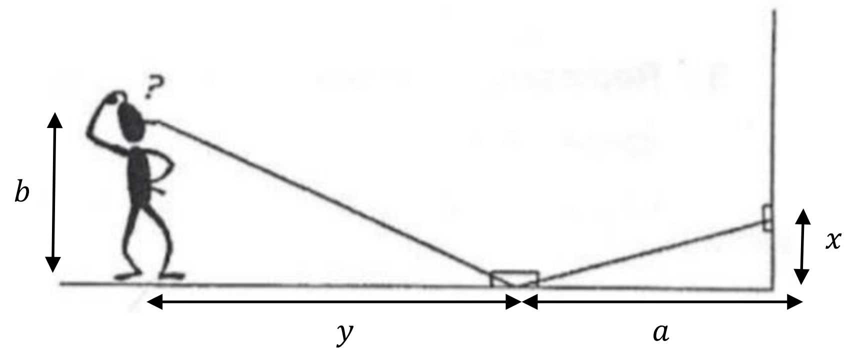
Segunda parte:

- Explicitação de dúvidas existentes durante a realização do ponto 2. da atividade (2. Análise dos dados).

Neste ponto, foi previsto o surgimento de dois tipos de dúvidas distintos, os quais sã apresentados de seguida com uma possível forma de as explicitar.

O primeiro surge pelo facto de terem sido recolhidos dados experimentalmente, o que, em princípio, não leva a um produto sempre igual das variáveis, mas sim aproximadamente igual. Deve ser esclarecida esta situação, explicando que existem sempre erros de medição que se vão propagando aquando de operações algébricas, e portanto os alunos devem discutir entre si qual será o valor da constante mais apropriado para a situação em causa. Em Física, quando se fazem este tipo de experiências chegando a valores aproximados, para encontrar o melhor valor, costuma-se retirar o valor mais alto e o valor mais baixo da amostra e depois fazer a média dos restantes. Caso os alunos estejam familiarizados com este procedimento, pode ser aplicado.

Outra dúvida que pode surgir prende-se com o facto de haver uma justificação para que o produto das duas medidas ser sempre uma constante k, independentemente das vezes que a experiência for realizada. O esclarecimento passa por aplicar uma lei da reflexão da luz: **o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão**. Passando esta propriedade para a situação em causa, obtemos algo deste tipo:



Tendo em conta que a e b são constantes ($a = 0{,}5$ e b corresponde à altura da pessoa que está a visualizar), pode-se aplicar a semelhança de triângulos, obtendo portanto o seguinte:

$$\frac{b}{y} = \frac{x}{a} <=> b \times a = x \times y$$

Mais uma vez, como a e b são constantes, o seu produto também é uma constante, que denominaremos por k, obtendo assim

$$x \times y = k$$

- Definição de conceitos teóricos relativos ao tema.

Nesta fase, deve ser explicada a relação existente entre as variáveis que estão a ser analisadas: as grandezas relacionadas nesta experiência dizem-se inversamente proporcionais. Tendo em conta que x é a distância do autocolante ao chão e y é a distância entre o observador e o espelho, a relação $x \times y = k$ é uma relação de proporcionalidade inversa, sendo k a constante de proporcionalidade inversa. Note-se que este k, aqui generalizado, é a constante à qual os alunos chegaram e que não pode ser concretizada nesta planificação.

Generalizando e introduzindo a definição pode-se dizer: que duas grandezas **x e y são inversamente proporcionais** quando o produto de quaisquer dois valores correspondentes é constante e diferente de zero.

Ou seja, temos que $x \times y = k <=> y = \frac{k}{x}, k \neq 0$ onde k é a **constante de proporcionalidade inversa**.

Dever-se-á dizer aos alunos que uma função de proporcionalidade inversa é então uma função que se pode representar por uma expressão analítica do tipo

$$f(x) = \frac{k}{x} \text{ ou } y = \frac{k}{x}, \text{ com } x \neq 0 \text{ e } k \neq 0.$$

Deve ser pedido aos alunos que escrevam no caderno diário estas definições para ficar registado.

Terceira parte:

- Ligar os computadores, iniciando sessão e propondo o ponto 3. da atividade (3. Representação gráfica).

Caso haja dúvidas, exemplificação de como se introduzem as coordenadas de um ponto no *GeoGebra*, assim como a introdução de funções.

No caso, basta fazer, por exemplo, (0.8, 1.85) e y=1.42/x, como exemplificado na imagem seguinte.

- Definição de conceitos.

Depois de toda a turma ter chegado ao gráfico pedido, deve ser explicado que a representação gráfica da função de proporcionalidade inversa $y = \frac{k}{x}\ (x \neq 0)$ chama-se **hipérbole**.

Quarta parte:

- Entrega de uma Ficha de Trabalho.
- Explicitação de dúvidas individualmente.

Quinta parte:

- Finalização da aula, propondo o resto da Ficha de Trabalho para trabalho de casa, caso não concluída na aula.

Terceira aula

Objetivos gerais

- Resolver e formular problema, e modelar situações utilizando funções (já estudadas).
- Consolidar os conteúdos programáticos já estudados acerca da proporcionalidade inversa.

Estrutura da aula

- Correção do trabalho de casa, caso haja.
- Resolução de tarefas propostas no manual escolar.
- Proposta de uma ficha de exercícios (caso haja tempo disponível).

Recursos

- Manual escolar e caderno diário.
- Lápis e borracha.
- Ficha de Exercícios.

Metodologia geral adotada

Esta aula pretende consolidar a temática, recorrendo a diversos exercícios e problemas.

Propõe-se a resolução das páginas 43, 44 e 45 do manual dos alunos, assim como a resolução de uma Ficha de Exercícios (Tarefa 3).

Desenvolvimento da aula

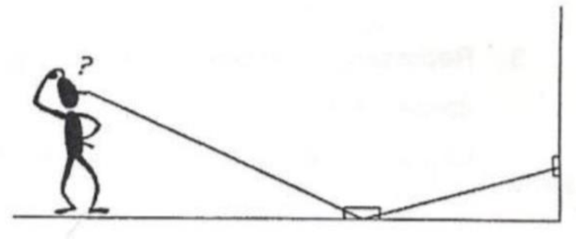
- Entrada dos alunos e acomodação na sala de aula.
- Escrita do sumário.
- Resolução de exercícios do manual e respetiva elucidação de dúvidas.
- Finalização da aula, com a proposta de uma Ficha de Exercícios para casa.

Durante todo o tempo de aula os alunos devem estar envolvidos na resolução dos exercícios propostos. Caso não terminem as páginas do manual sugeridas (páginas 43, 44 e 45), ficarão para trabalho de casa. Se as terminarem, deve ser entregue a Ficha de Exercícios (Tarefa 3).

Atividade – Espelhos

<u>Material necessário:</u>

- Um espelho e um autocolante, ambos pequenos
- Fita métrica
- Papel e lápis (ou caneta)
- Computador (com o *GeoGebra* instalado)



1. <u>Experiência / Recolha de dados:</u>

   1.1. Coloca o espelho fixo no chão a um metro de distância de uma parede.

   1.2. Coloca um autocolante na parede, alinhando-o com o espelho, a 0,5 metros do chão.

   1.3. Dentro do grupo, escolham uma pessoa para fazer sempre as medições e outra pessoa para visualizar o autocolante refletido no espelho.

   1.4. Posiciona-te junto ao espelho e vira-te para a parede. Vai-te afastando até que consigas ver o autocolante refletido no espelho.

   1.5. Regista a distância a que te encontras do centro do espelho na tabela da página seguinte.

   1.6. Faz variar a altura do autocolante na parede e repete os procedimentos 3. e 4., registando os valores, em metros, na tabela da página seguinte.

Distância do autocolante ao chão x	Distância entre ti e o centro do espelho y	$x \times y$

1.7. Se se colocar o autocolante muito próximo do chão, como se deve posicionar o observador?

____

____

____

____

1.8. E se se colocar o autocolante num ponto muito alto?

____

____

____

____

2. Análise dos dados:

2.1. Preenche a terceira coluna da tabela. Que regularidade observas? A partir dessa regularidade, escreve uma expressão algébrica que melhor relacione as duas distâncias.

____

____

____

2.2. Exprime agora y como função de x, tendo em conta o que concluíste na alínea anterior.

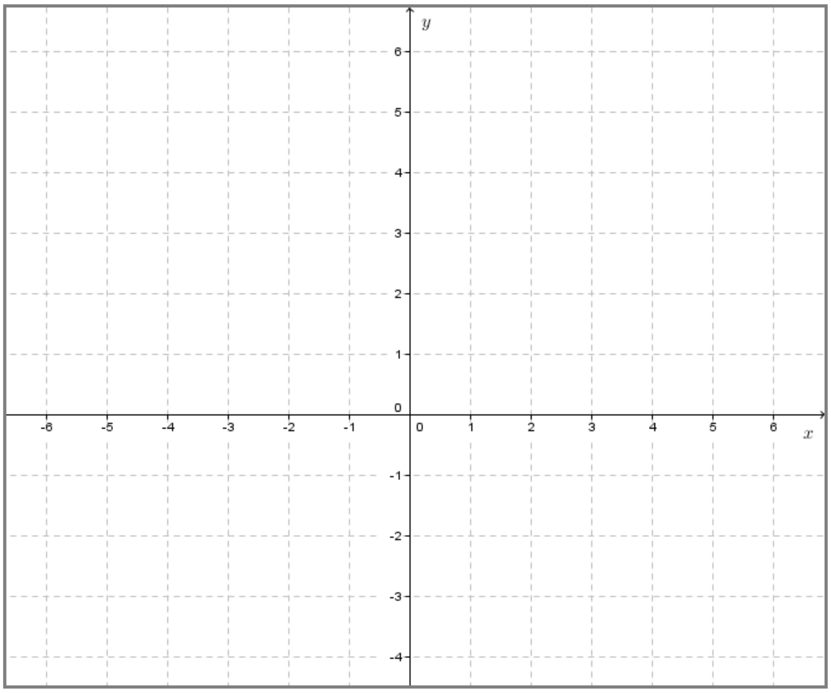
____

3. Representação gráfica

3.1. Com a ajuda do *GeoGebra* representa num referencial os pontos (x, y) que correspondem às distâncias escolhidas.

3.2. Representa também, no mesmo referencial, a função que encontraste na alínea 2.2.

3.3. Esboça, no referencial seguinte, o que visualizaste no computador.



O gráfico da função sobrepõe-se a esse conjunto de pontos? Caso isso não aconteça, tenta encontrar razões para explicar o facto de haver pontos que não coincidem exactamente com o gráfico da função.

Ficha de Trabalho – Proporcionalidade Inversa

1. Seja x cm o comprimento de um retângulo e y cm a largura desse mesmo retângulo. Sabendo que a área é 12 cm^2:

   1.1. Quais são os valores que x e y podem tomar? Indica, pelo menos, seis retângulos diferentes, cuja área seja 12 cm^2.

   Nota que o comprimento e/ou a altura podem não ser números inteiros.

   1.2. Regista numa tabela os valores encontrados acima.

   1.3. Representa graficamente os valores que encontraste na alínea anterior.

   1.4. Tendo em conta o que fizeste antes, que regularidades observas?

   1.5. Indica uma expressão algébrica que relacione o comprimento com a altura dos retângulos com área igual a 12 cm^2.

2. De entre as situações apresentadas a seguir, indica as que são de proporcionalidade e classifica-as, indicando a constante de proporcionalidade.

   2.1. A altura e o peso de uma pessoa.

   2.2. O raio e a área de um círculo.

   2.3. O diâmetro e o perímetro de uma circunferência.

   2.4. O preço de um metro de fazenda e o número de metros de fazenda que se compram com certa quantia.

   2.5. Peso das maças e o custo total das maças.

3. Para um certo valor de k ($k \neq 0$ e $k \neq 1$), a expressão $y = \frac{k}{x}$ traduz a relação entre as variáveis x e y. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

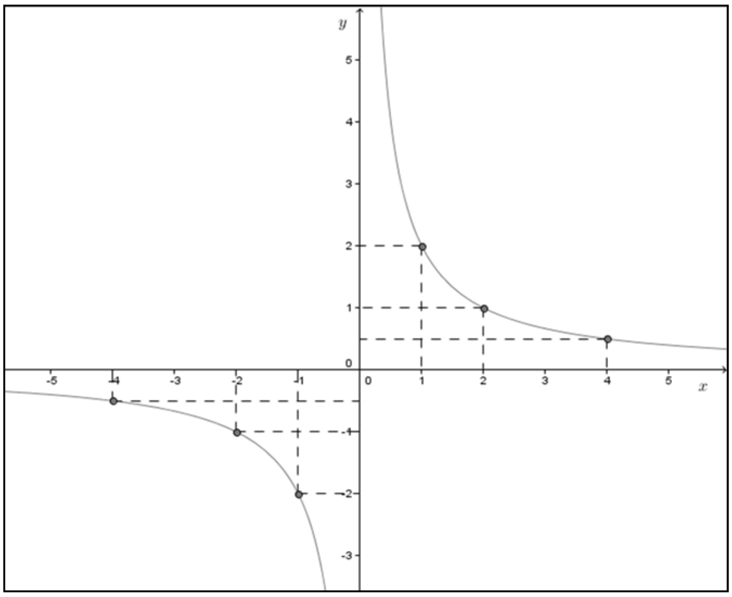
a) As variáveis x e y são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é $\frac{1}{k}$.
b) As variáveis x e y são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é $\frac{1}{k}$.
c) As variáveis x e y são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é k.
d) As variáveis x e y são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é k.

4. Faz uma pesquisa sobre a Lei de Boyle-Mariotte e sintetiza-a segundo os seguintes tópicos:

- Como varia o volume do gás em função das variações da pressão;
- Indicando a expressão algébrica que relacione o volume (em litros) com a pressão (em atmosferas).

Ficha de Exercícios

1. O gráfico representado a seguir é uma função de proporcionalidade inversa.

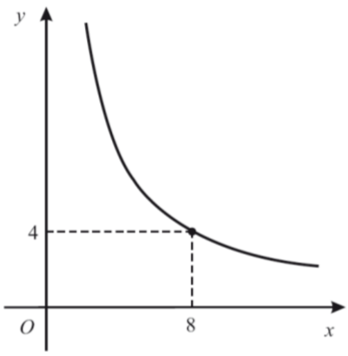


1.1. Qual é a função que representa o gráfico? E qual a constante de proporcionalidade?

1.2. Determina x sabendo que $y = -6$.

1.3. O que acontece a y quando x toma valores positivos muito pequenos?

2. Na figura seguinte está representada parte do gráfico de uma função de proporcionalidade inversa.



O ponto de coordenadas (8,4) pertence ao gráfico da função. Determina a ordenada do ponto do gráfico que tem abcissa 2 e mostra como chegaste à tua resposta.

3. Uma doença atacou uma população de coelhos bravos. O decrescimento da população faz-se de acordo com a seguinte fórmula:

$$N = \frac{2500}{t}, 1 \leq t \leq 20,$$

onde N representa o número de coelhos vivos e t o número de dias após ser detetada a doença.

3.1. Completa a seguinte tabela.

t	2		10	15	
N		500			125

3.2. Justifica que existe proporcionalidade inversa entre os valores de t e de N. Qual é a constante de proporcionalidade inversa?

3.3. Desenha o gráfico da função, recorrendo à tabela da primeira alínea.

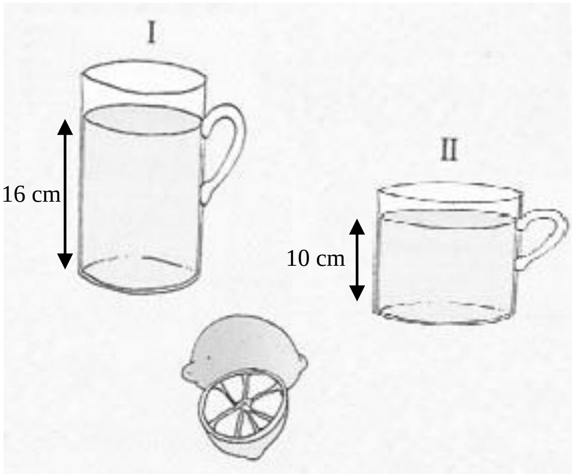
4. A fórmula $T = \frac{180}{m}, 2 \leq m \leq 10$ permite calcular a temperatura , T, do café, em graus Celsius, m minutos depois de acabado de fazer.

4.1. Represente o gráfico de T para $2 \leq m \leq 10$.

4.2. A Ana gosta de tomar café abaixo dos 70ºC.

Quantos minutos deve esperar para tomar café, depois deste acabar de ser feito?

5. Cada um dos jarros representados na figura seguinte contém um litro de sumo de limão.



5.1. Determina a área da base de cada jarro, em cm^2.

5.2. Escreve uma expressão analítica que permita obter a área da base de cada jarro, A_b, em função da altura, h, do sumo nele contido.

6. Numa pequena composição matemática, resume o que aprendeste sobre a proporcionalidade inversa, dando alguns exemplos de situações do quotidiano onde a proporcionalidade inversa está contemplada.

Anexo 7 – Planificação 2: Aplicação do produto escalar na Geometria (11.º ano)

Data prevista: 29 de novembro de 2013

Objetivo geral

- Aplicar o produto escalar de vetores na caracterização de lugares geométricos no plano, nomeadamente:
    1. Mediatriz de um segmento de reta;
    2. Reta tangente a uma circunferência;
    3. Circunferência com um dado diâmetro.

Estrutura da aula

- Dedução geométrica dos lugares geométricos obtidos através do produto escalar, seguida da sua resolução analítica:
    1. Reta perpendicular a um segmento de reta;
    2. Mediatriz de um segmento de reta;
    3. Reta tangente a uma circunferência;
    4. Equação de uma circunferência com dado diâmetro.
- Resolução de exercícios.

Recursos

- Computador, projetor e apresentação *.ppt.
- Lápis ou caneta.
- Tarefa: Aplicação do produto escalar na Geometria.
- Material de desenho: régua e compasso. (dispensável)

Metodologia geral adotada

A aula proposta pretende elucidar os alunos acerca de mais uma das aplicações do produto escalar, nesta aula concreta, aplicações na geometria.

Pretende-se portanto que os alunos, no final da aula, sejam capazes de definir lugares geométricos (retas e circunferências) através da aplicação do produto escalar.

Propõe-se uma apresentação de slides (em PowerPoint) para que os conjeturem acerca dos lugares geométricos de determinado produto escalar. Esta apresentação está fortemente apoiada em perguntas-chave que permite desenvolver a aula e que se encontram discriminadas no desenvolvimento da aula. Pretende-se que no final de cada lugar geométrico determinado se proponha uma tarefa para a consolidação dos conteúdos.

Para finalizar, é proposta a resolução de algumas tarefas, as quais passam não só por tarefas do manual, como também tarefas de uma ficha de trabalho (Tarefa: Aplicação do produto escalar na Geometria).

Desenvolvimento da aula

Primeira parte:

- Entrada dos alunos e acomodação na sala de aula.
- Escrita do sumário.

  Aplicações do produto escalar na geometria. Conjuntos de pontos do plano definidos por condições no plano.

Segunda parte:

- Início da apresentação de slides, a qual está detalhada nas tabelas seguintes.

<table>
<tr><th colspan="2">Reta perpendicular a um segmento de reta</th></tr>
<tr><td>
</td><td>

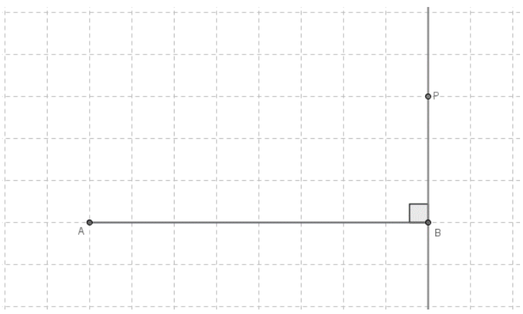
Seja $[AB]$ *um segmento de reta. Onde deve estar o ponto* P *de forma a que* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ *?*

Pressupõe-se que os alunos consigam identificar algumas hipóteses para o ponto P. Assim, pede-se para um aluno se dirigir ao quadro identificar as diferentes posições que o ponto P pode tomar.

Que região do plano fica definida por esse conjunto de pontos?

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

Com a pergunta anterior, os alunos devem facilmente constatar que é uma reta perpendicular ao segmento $[AB]$, prosseguindo assim para o slide seguinte.

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

Vamos então considerar o ponto A(3,-2) e o ponto B(5,4). Qual é a equação da reta perpendicular ao segmento $[AB]$*?*

$P = (x, y)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (5,4) - (3,-2) = (2,6)$

$\overrightarrow{BP} = P - B = (x, y) - (5,4) = (x - 5, y - 4)$

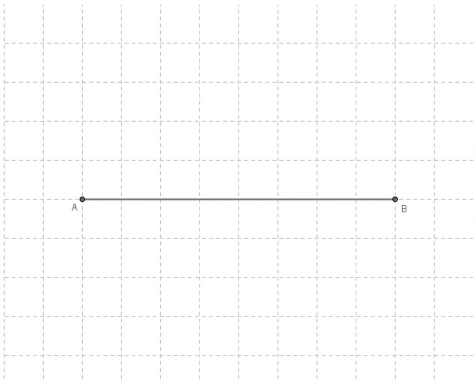
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \iff (2,6) \cdot (x - 5, y - 4) = 0$

$\iff 2x - 10 + 6y - 24 = 0$

$\iff 2x + 6y - 34 = 0$

De facto, obtemos a equação geral de uma reta, no caso, a reta perpendicular ao segmento $[AB]$.

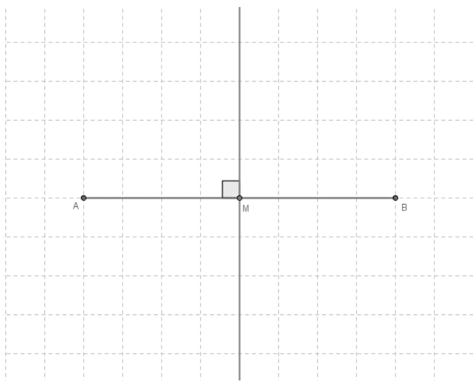
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Mediatriz de um segmento de reta</th></tr>
<tr><td>
</td><td>

Tendo em conta o que foi feito anteriormente, como se poderá chegar à equação da mediatriz do segmento $[AB]$*?*

Os alunos devem concluir que no exemplo anterior tínhamos uma reta perpendicular ao segmento $[AB]$ que passava por B, enquanto que neste caso queremos uma reta perpendicular ao segmento $[AB]$ mas que passe pelo ponto médio, chamemos-lhe M.

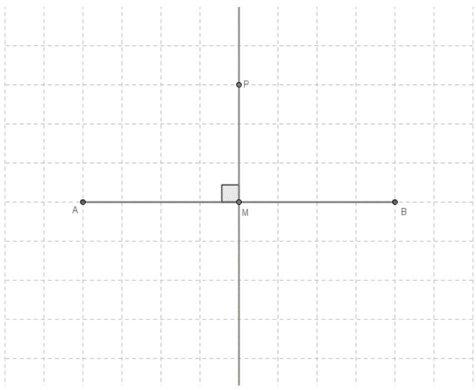
Aqui, poderá surgir uma dúvida em relação à definição de mediatriz de um segmento. Pode ser recordado este conceito: é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ que distam igualmente de A e B. Podemos simplificar dizendo que é a reta perpendicular ao segmento que contém o respetivo ponto médio.

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

Se considerarmos $A(x_1, y_1)$ *e* $B(x_2, y_2)$*, como podemos determinar as coordenadas do ponto médio* M*?*

Pela definição: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Através de operações entre vetores: $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

Seja então novamente $A(3, -2)$ *e* $B(5,4)$*. Qual é a equação da reta que define a mediatriz do segmento* $[A, B]$*?*

$P(x, y)$; $\overrightarrow{AB} = (2,6)$

$M\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (4, 1)$ <u>ou</u> $M = (3, -2) + \frac{1}{2}(2,6) = (4,1)$

$\overrightarrow{AM} = M - A = (4,1) - (3, -2) = (1, 3)$

$\overrightarrow{MP} = P - M = (x, y) - (4,1) = (x - 4, y - 1)$

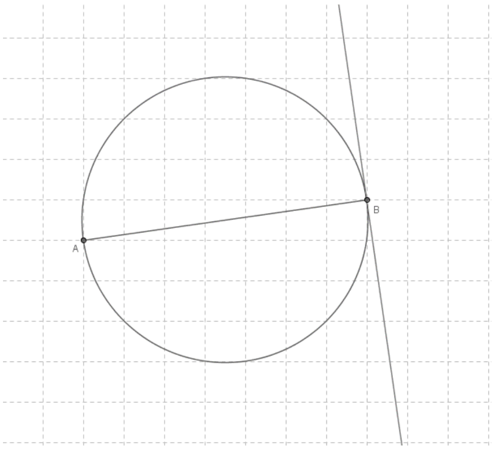
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$ <=> $(1,3) \cdot (x - 4, y - 1) = 0$

<=> $x - 4 + 3y - 3 = 0$

<=> $x + 3y - 7 = 0$

</td></tr>
</table>

Reta tangente a uma circunferência



Vamos agora determinar a equação da reta tangente à circunferência de diâmetro $[AB]$ *no ponto* B*, com* $A(1,2)$ *e* $B(5,3)$.

Com o já feito anteriormente, é esperado que os alunos imediatamente identifiquem que devem fazer o produto escalar do vetor $\overrightarrow{AB}$ com o vetor $\overrightarrow{BP}$, sendo P um ponto pertencente à reta perpendicular ao segmento $[AB]$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5,3) - (1,2) = (4,1)$$

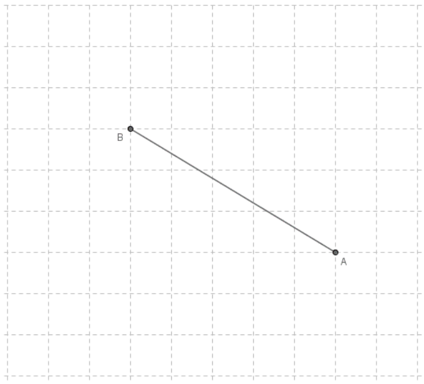
$$\overrightarrow{BP} = P - B = (x, y) - (5,3) = (x - 5, y - 3)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (4,1) \cdot (x - 5, y - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 20 + y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + y - 23 = 0$$

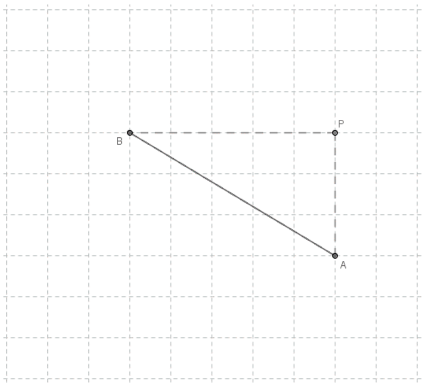
Equação de uma circunferência



Vamos voltar a considerar um segmento $[A, B]$. Qual é o lugar geométrico do ponto $P(x, y)$ de forma a que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$?

O que pretendemos é que o vetor $\overrightarrow{PA}$ seja perpendicular ao vetor $\overrightarrow{PB}$, ou seja, o ponto P deve estar estrategicamente localizado de forma a que o ângulo formado pelos vectores seja recto em P.

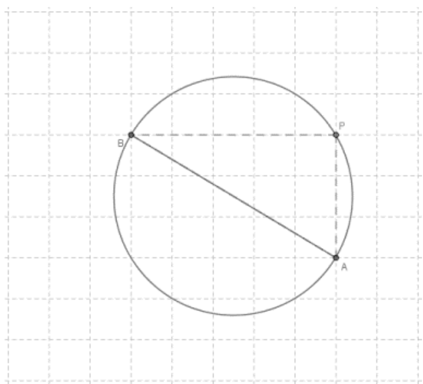
Os alunos devem concluir que o ponto P pode assumir várias localizações as quais dependem apenas do ângulo que é formado entre os vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$.



Se unirmos os pontos A, B e P obtemos então um triângulo, o qual podemos classificá-lo quanto aos ângulos de...?

É um triângulo retângulo. Mas, como já visto, o ponto P não está restrito àquela localização. Assim, será pertinente chamar um aluno ao quadro para identificar mais locais possíveis para o ponto P, colocando a questão: Qual o nome que se dá ao conjunto de pontos que P pode assumir? Pretende-se que os alunos conjeturem chegando a uma circunferência.

De facto, sabemos que um triângulo inscrito numa semi-circunferência, cujo um dos lados é o diâmetro dessa mesma circunferência, é um triângulo retângulo.



Vamos então considerar o ponto $A(2,4)$ e o ponto $B(-6,-2)$. *Como podemos então chegar à equação da circunferência de diâmetro $[AB]$?*

$\overrightarrow{PA} = A - P = (2, 4) - (x, y) = (2 - x, 4 - y)$

$\overrightarrow{PB} = B - P = (-6, -2) - (x, y) = (-6 - x, -2 - y)$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \iff (2 - x, 4 - y) \cdot (-6 - x, -2 - y) = 0$

$\iff -12 - 2x + 6x + x^2 - 8 - 4y + 2y + y^2 = 0$

$\iff x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

Através da equação encontrada e de manipulação da expressão, encontra as coordenadas do ponto O, centro da circunferência.

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 \iff x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 20 + 4 + 1$$

$$\iff (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

Logo $O(-2,1)$.

Terceira parte:

- Entrega de uma tarefa, com a principal finalidade de consolidar os conteúdos.

  NOTA: Começar pelo exercício 2., ficando o exercício 1. para trabalho de casa.

- Explicitação de dúvidas individualmente, a não ser que sejam dúvidas comuns na turma e exijam uma explicação no quadro.

Quarta parte:

- Finalização da aula, propondo o resto da tarefa para trabalho de casa, caso não concluída na aula.
- Mais tarefas que podem ser feitas para consolidar a matéria:
  - Ficha de exercícios entregue no dia 27 de novembro: exercícios 8, 9 e 10.
  - Manual do aluno: página 119, exercícios 2 e 7.

    Estes dois exercícios já foram resolvidos em aulas anteriores por processos diferentes. Pretende-se agora que os alunos apliquem o produto escalar para os resolverem.

Tarefa: Aplicação do produto escalar na Geometria

1. Sejam $A(1,0)$ e $B(3,4)$. Determina uma equação para:
   1.1. a mediatriz de $[AB]$;
   1.2. a circunferência de diâmetro $[AB]$;
   1.3. a tangente à circunferência de diâmetro $[AB]$, no ponto A;
   1.4. a reta perpendicular à reta AB e que contém a origem das coordenadas.

2. A equação seguinte diz respeito a uma circunferência.

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = 25$$

   2.1. Indica as coordenadas do centro da circunferência.
   2.2. Qual é o raio da circunferência?
   2.3. Seja A o ponto de interseção da circunferência com o eixo horizontal, de abcissa positiva. Determina as coordenadas de A.
   2.4. Determina a equação reduzida da reta tangente à circunferência no ponto A.

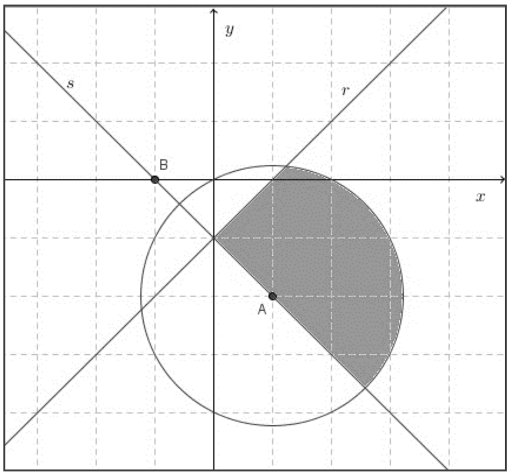
3. Em relação a um referencial o.n. $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, são assinalados os pontos $A(-2,1)$ e $B(4,3)$. Considera ainda que M é o ponto médio de $[A, B]$.

   Identifica e faz a representação gráfica do conjunto dos pontos P do plano que satisfazem a condição:

   3.1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$
   3.2. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
   3.3. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$
   3.4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$
   3.5. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = 4$

4. No referencial o.n. da figura, os pontos A e B têm coordenadas $(1, -2)$ e $(-1, 0)$, respetivamente. Sabe-se que:

- a circunferência tem centro no ponto A e passa na origem do referencial;
- a reta s passa nos pontos A e B;
- a reta r é a mediatriz de $[AB]$.



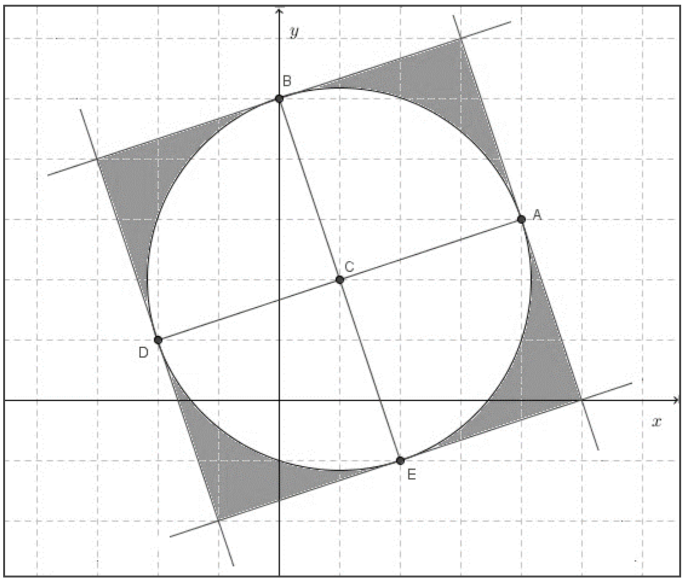
4.1. Escreve as equações reduzidas das retas r e s.

4.2. Escreve uma equação da circunferência.

4.3. Define por uma condição a região sombreada na figura.

5. Na figura seguinte representam-se o referencial ortonormado xOy, a circunferência de centro C, os pontos da circunferência A, B, D e E, e as retas tangentes à circunferência nos pontos A, B, D e E.Sabe-se que:

- $B(0,5)$ e $C(1,2)$;
- $[BE]$ e $[AD]$ são diâmetros da circunferência;
- $BE \perp AD$.



5.1. Indica as coordenadas dos pontos A, D e E.

5.2. Aplicando o produto escalar determina:

i. uma equação cartesiana da circunferência;

ii. as equações reduzidas das retas tangentes à circunferência nos pontos A, B, D e E.

5.3. Escreve uma condição que represente o conjunto de pontos a sombreado assinalados na figura.

Anexo 8 – Planificação 3: A resolução de problemas envolvendo equações de 2.º grau (9.º ano)

Data prevista: 2 de dezembro de 2013

Objetivos gerais

- Resolver equações do 2º grau a uma incógnita.
- Resolver e formular problemas (geométricos e algébricos) envolvendo equações do 2º grau.

Estrutura da aula

- Síntese dos conteúdos já lecionados relacionados com a temática:
  1. Casos notáveis da multiplicação
  2. Lei do anulamento do produto
  3. Fórmula resolvente
- Resolução de tarefas (exercícios e problemas).

Recursos

- Lápis ou caneta
- Manual do aluno
- Tarefa: Resolução de problemas envolvendo equações de 2º grau

Metodologia geral adotada

A aula proposta pretende consolidar os conteúdos programáticos relacionados com a resolução de equações do 2º grau, trabalhando ainda a resolução de problemas que envolvem este tipo de equações. Pretende-se incentivar os alunos a adotarem um método de resolução de problemas estruturado, no caso, o método de resolução de problemas de Polya.

Propõe-se a resolução de alguns exercícios geométricos ou algébricos que envolvam equações de 2º grau (completas e incompletas), reforçando a ideia de seguir um método de resolução de problemas baseado no apresentado.

Desenvolvimento da aula

Primeira parte:

- Entrada dos alunos e acomodação na sala de aula.
- Escrita do sumário.

Resolução de problemas envolvendo equações de 2º grau.

Segunda parte:

- Síntese dos conteúdos já leccionados, relativos à temática da aula.

Casos notáveis da multiplicação

$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$

Quadrado de um binómio

$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2-b^2}$

Diferença de quadrados

Exemplos:

- $(2x-3)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(-3) + (-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$
- $\left(\frac{4}{5} - x\right)\left(\frac{4}{5} + x\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - x^2 = \frac{16}{25} - x^2$

Lei do anulamento do produto

$\boxed{A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0}$

Um produto é nulo se e só se

Exemplos:

- $4x + 2x^2 = 10x$ <=> $2x^2 + 4x - 10x = 0$ <=> $2x^2 - 6x = 0$ <=>

  $2x(x - 3) = 0$ <=> $2x = 0 \vee x - 3 = 0$ <=> $x = 0 \vee x = 3$

- $(-2x)^2 - 36 = 0$ <=> $4x^2 - 36 = 0$ <=> $x^2 - 9 = 0$ <=>

  $(x - 3)(x + 3) = 0$ <=> $x = 3 \vee x = -3$

  NOTA: Em exemplos idênticos a este, os alunos têm por hábito fazer simplesmente $x^2 = 9$ <=> $x = \pm 3$. Não é tão elegante e dá mais oportunidade aos erros, pois muitas vezes o valor negativo é esquecido, ficando assim esquecida também uma solução. Deve ser reforçada a ideia de que de facto a equação se pode resolver dessa forma simplificada, desde que seja bem resolvida.

- $\frac{3}{2}x^2 = 0$ <=> $x = 0$

Fórmula resolvente

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemplos:

- $x^2 + 2 - 3x = 0$ <=> $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ <=> $x = \frac{3 \pm 1}{2}$ <=> $x = 2 \vee x = 1$

NOTA: Os exemplos apresentados são modelos, não implica que sejam exatamente estes utilizados na aula. Os exemplos dados na aula devem estar de acordo com as dificuldades que os alunos demonstrem na altura.

Terceira parte:

- Resolução de uma tarefa proposta (Tarefa – Resolução de problemas envolvendo equações de 2ºgrau) com diferentes objetivos: consolidar os conteúdos e desenvolver a capacidade de resolução de exercícios.

- As primeiras tarefas propostas devem ser resolvidas em conjunto com a turma, para que os alunos compreendam o método de resolução de problemas. As seguintes, serão resolvidas (ou não) conforme a turma apresente dificuldades de compreensão. Será também feita uma explicitação de dúvidas individualmente, a não ser que sejam dúvidas comuns na turma e exijam uma explicação no quadro.

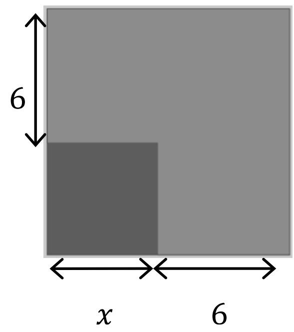
Quarta parte:

- Finalização da aula, propondo o resto da tarefa para trabalho de casa, caso não concluída na aula.
- Mais tarefas que podem ser feitas para consolidar a matéria:
  - Manual do aluno – Teste 3, a partir do exercício 4 inclusive (páginas 80 e 81)
  - Caderno de Atividades – Ficha 9 (páginas 37 e 38)

Resolução de problemas envolvendo equações de 2.º grau

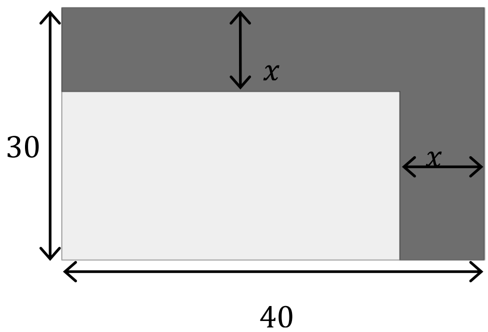
1. A diferença entre o quadrado de um número e 30 é igual ao próprio número. Qual é esse número?

2. O quadrado da diferença entre um número e 5 é 64. Qual é esse número?



3. Um quadrado tem de lado x cm. Aumentando 6 cm ao lado, obtém-se um quadrado de área 121 cm^2. Quanto mede o lado do quadrado?

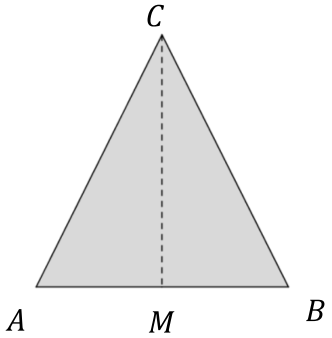
4. Num terreno retangular com 40 m de comprimento e 30 m de largura, construíram-se duas ruas, de largura x, como se mostra na figura seguinte. Sabendo que a área do terreno restante é metade da área do terreno original, determina a largura da rua.



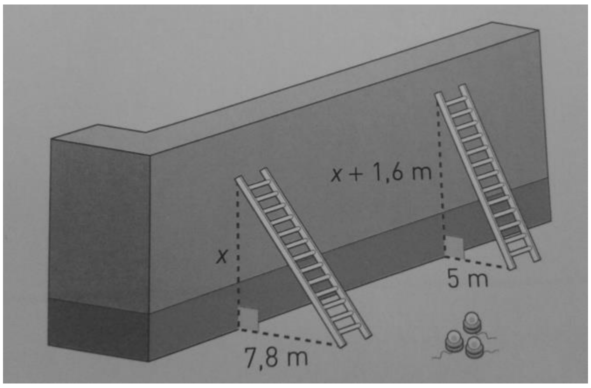
5. A diagonal de um retângulo mede 5 metros. Se o comprimento desse retângulo for um metro maior do que a sua largura, quais são as suas dimensões?

6. O triângulo $[ABC]$ é isósceles e $[CM]$ é a altura relativa à base $[AB]$. De acordo com os dados da seguintes e tendo em conta a figura, determina $\overline{AC}$.

- $\overline{AB} = 2x + 4$
- $\overline{BC} = x + 6$
- $\overline{CM} = 2x$



7. Para colocar candeeiros numa parede, um eletricista utiliza uma escada. Consoante a altura a que pretende colocar o candeeiro, aproxima ou afasta a base da escada, como é sugerido na figura.



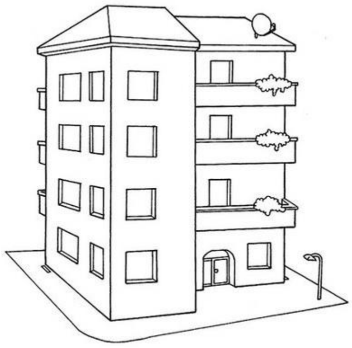
Atendendo aos valores dados na figura, determina o comprimento da escada, começando por determinar o valor de x.
Apresenta o resultado arredondado às décimas.

8. Um saco opaco contém bolas brancas e bolas pretas indistinguíveis ao tato. Retira-se uma bola do saco e regista-se a sua cor. Sabe-se que dentro do saco estão 100 bolas e que:
- $P(\text{"a bola retirada é branca"}) = x^2 - 0{,}4x$
- $P(\text{"a bola retirada é preta"}) = -0{,}3x + 1$

Determina quantas bolas de cada cor estão dentro do saco.

9. O quadrado da oitava parte de um bando de macacos saltitava num bosque, divertindo-se com a brincadeira, enquanto que os 12 restantes tagarelavam no alto de um outeiro. Quantos macacos constituíam o bando?

10. O António estava na varanda da sua casa e deixou cair uma pedra, na vertical. A altura, a, em metros, a que a pedra se encontra do solo é dada pela expressão:



$$a(t) = 30 - 5t^2$$

onde t é o tempo, em segundos, decorrido desde o início da queda.

10.1. De que altura, relativamente ao solo, caiu a pedra?

10.2. A que altura estava a pedra passados dois segundos?

10.3. A Alzira, que vive no mesmo prédio que o António, mas a 20 metros do solo, viu a pedra passar-lhe a frente. Em que instante isso aconteceu? Apresenta o resultado arredondado às centésimas de segundo.

10.4. Quanto tempo decorreu até a pedra atingir o solo? Apresenta o resultado arredondado às centésimas de segundo.

11. A altura h, em metros, atingida por um corpo que é projetado de baixo para cima, ao fim de t segundos, com uma velocidades inicial de 20 m/s, é dada pela fórmula:

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 2$$

11.1. Determina a altura do solo a que se encontra o corpo ao fim de dois segundos.

11.2. Quando o corpo se encontra a 10 metros do solo, quanto tempo decorreu após o lançamento? Apresenta o resultado aproximado às centésimas.

11.3. Será que o corpo atinge a altura de 100 metros? Justifica.

Anexo 9 – Planificação 4: Preparação para o Teste Intermédio (9.º ano)

Datas previstas: 10, 12, 14, 17 e 19 de março de 2014

Objetivo geral

- Rever/recordar conteúdos programáticos já estudados ao longo do ciclo de estudos

Estrutura das aulas

- Resolução de exercícios e problemas de Testes Intermédios de anos letivos anteriores.
- Proposta de resolução de mais tarefas de Testes Intermédios de anos letivos anteriores como trabalho autónomo do aluno, trabalhando as dúvidas dos alunos nas aulas.

Recursos

- Teste Intermédio do ano letivo 2011/2012[2]
- Teste Intermédio do ano letivo 2012/2013[3]
- Lápis, borracha e caderno diário
- Calculadora

Desenvolvimento da primeira aula (10 de março de 2014)

- Entrada dos alunos e acomodação na sala de aula.
- Escrita do sumário e entrega dos Testes Intermédios dos anos letivos 2011/2012 e 2012/2013.

Resolução de exercícios propostos em Testes Intermédios de anos letivos anteriores.

[2] Disponível em http://www.gave.min-edu.pt/np3/430.html
[3] Disponível em http://www.gave.min-edu.pt/np3/430.html

- Resolução de exercícios ou problemas previamente selecionados, indicando aos alunos quais os propostos para trabalho autónomo do aluno e quais os que ainda não devem ser resolvidos e recordando conteúdos temáticos de anos letivos anteriores.

  Sequência a adotar:

  TI 2012: 8; 6
- Finalização da aula sintetizando os exercícios propostos para trabalho de casa.

  TI 2013: 9

  TI 2012: 1.2; 1.3; 5; 9

NOTA: A tarefa 9 do TI 2013 foi iniciada no final da aula a pedido dos alunos relativamente à revisão sobre a resolução de sistemas de equações, ficando como trabalho de casa.

Desenvolvimento da segunda aula (12 de março de 2014)

- Entrada dos alunos e acomodação na sala de aula.
- Escrita do sumário.

  Continuação do sumário da aula anterior.
- Metodologia idêntica à da aula anterior, começando por corrigir a tarefa iniciada na aula passada (Tarefa 9. do TI2013).

  Sequência a adotar:

  TI 2013: 9

  TI 2012: 10; 3

  TI 2013: 5

NOTA: Caso não seja possível resolver todas as tarefas propostas, ficará para a aula seguinte.

- Finalização da aula reforçando os exercícios propostos na aula passada para trabalho de casa.

  TI 2012: 1.2; 1.3; 5; 9

NOTA: As duas primeiras aulas serão dadas pela professora estagiária, sendo que as restantes ficarão ao cargo da professora responsável pela turma.

Desenvolvimento das aulas seguintes (14, 17 e 19 de março de 2014)

- Entrada dos alunos e acomodação na sala de aula.
- Escrita do sumário.

Explicitação de dúvidas para o Teste Intermédio a realizar dia 21 de março.

- Realização das restantes tarefas dos Testes Intermédios, sendo a sequência adotada definida pela professora responsável pela turma.
- Elucidação das dúvidas dos alunos relativamente aos exercícios propostos como estudo para o Teste Intermédio.
- Finalização da aula.

Desenvolvimento das tarefas propostas

Teste Intermédio 2012

<table>
<tr><td colspan="3">Tarefa 8.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

8. Na Figura 4, estão representados um retângulo $[ABCD]$ e uma circunferência de centro no ponto O e raio r

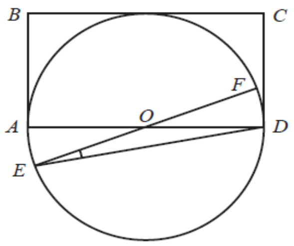


Figura 4

Sabe-se que:

- o ponto E pertence à circunferência e é exterior ao retângulo $[ABCD]$
- $[AD]$ e $[EF]$ são diâmetros da circunferência
- o lado $[BC]$ do retângulo é tangente à circunferência
- $D\hat{E}F = 10^\circ$

A tarefa foi proposta como trabalho de casa.
</td></tr>
<tr><td>(1)</td><td>Qual é a informação fornecida? [PC]</td><td>Pretende-se que os alunos analisem a figura em causa (Figura 4) e estabeleçam relações entre as medidas do retângulo e as medidas da circunferência, isto é, $\overline{AB} = \overline{CD} = r$ ou $\overline{AD} = \overline{EF} = 2r$, sendo r o raio da circunferência considerada.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

8.1. Admite que o perímetro do retângulo $[ABCD]$ é igual a $30\,\text{cm}$

Determina o comprimento da circunferência.

Apresenta o resultado em centímetros, arredondado às décimas.

Mostra como chegaste à tua resposta.

Nota – Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.
</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>O que é pedido no enunciado? [C-M]</td><td>Pretende-se que os alunos concluam que o comprimento da circunferência é o perímetro da mesma.</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>O que necessitamos de conhecer para determinar o pedido? [PC]</td><td>Pretende-se que os alunos identifiquem que falta conhecer o valor do raio da circunferência para conseguirem determinar o seu perímetro.</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td>Como podemos determinar o raio da circunferência com os dados que temos? [PC]</td><td>Pretende-se que os alunos concluam que, como o perímetro do retângulo é 30 cm basta encontrar uma das dimensões do retângulo, por exemplo a largura, para concluir acerca do raio da circunferência.

$$P_{\square[ABCD]} = 2 \times \overline{AD} + 2 \times \overline{AB} = 30$$
</td></tr>
</table>

		$2 \times 2r + 2 \times r = 30 \Leftrightarrow 6r = 30 \Leftrightarrow r = 5$
(5)	Sabendo agora o raio da circunferência, o que fazemos de seguida? **[PC]**	Pretende-se que os alunos compreendam que determinar o raio não é o pedido mas sim determinar o comprimento da circunferência, tarefa que se torna simplificada com o conhecimento do valor do raio da mesma. $P_{\bigcirc} = 2 \times \pi \times r = 10\pi \cong 31{,}4$
Resposta: O comprimento da circunferência é de 31,4 cm.		
8.2. Determina a amplitude de uma rotação de centro em O que transforme o ponto F no ponto A Mostra como chegaste à tua resposta.		
(6)	O que é pedido no enunciado? **[R]**	Pretende-se que os alunos afirmem que é necessário encontrar o ângulo de rotação que transforma o ponto F no ponto A, isto é, o ângulo $F\hat{O}A$.
(7)	**Recordar…**	**Rotação** É uma isometria e, para a descrever, é necessário conhecer: • o centro de rotação • a amplitude do ângulo de rotação • o sentido do ângulo de rotação
(8)	Como podemos determinar esse ângulo ($F\hat{O}A$) com os dados fornecidos? **[PC]**	Pretende-se que os alunos refiram que é conhecido o valor do ângulo DÊF, no caso, 10°, tomando, a partir daqui, dois possíveis métodos de resolução, segundo os critérios específicos de correção do Teste Intermédio.
(9)	Como podemos confirmar o resultado? **[PD]** Existe outra forma de descobrir o ângulo? **[PD]**	Pretende-se que os alunos considerem uma nova perspetiva para determinar o pedido, desde que correta.
	1.º Processo de resolução	$FD = 2D\hat{E}F = 20°$ $F\hat{O}A = 180° - 20° = 160°$
	2.º Processo de resolução	$A\hat{D}E = 10°$, pois o triângulo $[EOD]$ é isósceles $E\hat{O}D = 180° - (10° + 10°) = 160°$ $F\hat{O}A = E\hat{O}D = 160°$ pois os ângulos são verticalmente opostos
Resposta: A amplitude é de 160º.		
8.3. Qual das afirmações seguintes é verdadeira? Transcreve a letra da opção correta. **(A)** O ponto B pertence à mediatriz do segmento de reta $[ED]$ **(B)** O ponto O pertence à mediatriz do segmento de reta $[ED]$ **(C)** O ponto B pertence à mediatriz do segmento de reta $[CD]$ **(D)** O ponto O pertence à mediatriz do segmento de reta $[CD]$		

Resposta: B

Tarefa 6.

6. Na Figura 2, estão representadas, num referencial cartesiano, as retas r e s

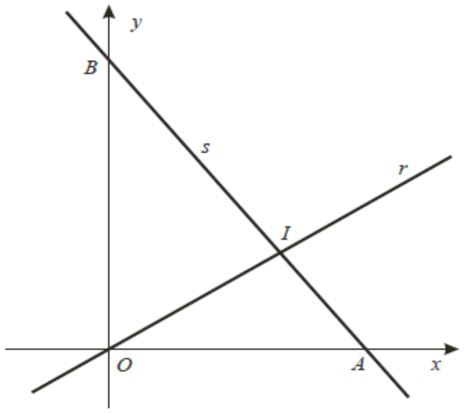


Figura 2

Sabe-se que:

- a reta r é definida por $y = 0{,}6x$
- a reta s é definida por $y = -1{,}2x + 4{,}5$
- o ponto A é o ponto de intersecção da reta s com o eixo das abcissas
- o ponto B é o ponto de intersecção da reta s com o eixo das ordenadas
- o ponto I é o ponto de intersecção das retas r e s

6.1. Qual é a ordenada do ponto B ?

<table>
<tr><td rowspan="3">(10)</td><td>Como se pode facilmente identificar a ordenada do ponto B? [C-M]</td><td rowspan="3">Pretende-se que os alunos percebam que o ponto B pertence à reta s e que, por sua vez, o ponto B é a interseção da reta s com o eixo das ordenadas, logo, a ordenada do ponto B é facilmente percetível na equação da reta traduzindo-se pela ordenada na origem.

Isto é, s: $y = -1{,}2x + 4{,}5$ logo a ordenada do ponto B é 4,5.</td></tr>
<tr><td>Qual é a abcissa do ponto B? [PC]</td></tr>
<tr><td>A reta s é definida por $y = -1{,}2x + 4{,}5$ que é uma função do tipo $y = mx + b$. Que significado tem o parâmetro b graficamente? [C-M]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recordar…</td><td>Função afim

O gráfico de uma função do tipo $y = mx + b$ tem a configuração de uma reta. O parâmetro m chama-se o declive da reta e o parâmetro b é a ordenada na origem.

• $m > 0$, a reta tem declive positivo</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>

- $m < 0$, a reta tem declive negativo
- $m = 0$, o declive é nulo e a função diz-se constante

Função linear

Quando $b = 0$, a expressão fica $y = mx$, denominando-se por função linear ou função de proporcionalidade direta.

Efetivamente, duas variáveis, x e y, dizem-se diretamente proporcionais se o quociente entre elas é constante e diferente de zero.

$$k = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = kx\ ,\ k \neq 0$$
</td></tr>
<tr><td>(11)</td><td>Existe outra forma de descobrirmos a ordenada do ponto B? [PD] Como? [PD]</td><td>Pretende-se que os alunos encontrem outra direção para a resolução da tarefa, como, por exemplo, sabendo que a abcissa do ponto B é nula, basta substituir esta informação na equação da reta s.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resposta: A ordenada do ponto B é 4,5.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

6.2. Qual é a medida do comprimento do segmento de reta $[OA]$?

Transcreve a letra da opção correta.

(A) 3,5

(B) 3,75

(C) 4,5

(D) 4,75
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">(12)</td><td>O que precisamos de saber para descobrir o comprimento do segmento de reta $[OA]$? [PC]</td><td rowspan="4">

Pretende-se que os alunos, ao analisar a representação gráfica, percebam que basta encontrar a abcissa do ponto A uma vez que o ponto O é a origem do referencial.

Substituindo na expressão que define a reta s, x por 0 obtemos:

$$0 = -1{,}2x + 4{,}5$$
$$\Leftrightarrow 1{,}2x = 4{,}5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{4{,}5}{1{,}2} = 3{,}75$$
</td></tr>
<tr><td>Como podemos encontrar a abcissa do ponto A? [PC]</td></tr>
<tr><td>A qual das retas pertence o ponto A? [PC]</td></tr>
<tr><td>Qual é a ordenada do ponto A? [PC]</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resposta: B</td></tr>
<tr><td colspan="3">

6.3. Determina as coordenadas do ponto I

Mostra como chegaste à tua resposta.
</td></tr>
<tr><td>(13)</td><td>Como podemos encontrar as coordenadas do ponto I? [PC]</td><td>Pretende-se que os alunos compreendam que o ponto I é o ponto de interseção das retas r e s. Logo, basta resolver um sistema de equações para encontrar as suas coordenadas.</td></tr>
</table>

		$\begin{cases} y = 0{,}6x \\ y = -1{,}2x + 4{,}5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 0{,}6x = -1{,}2x + 4{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 0{,}6x + 1{,}2x = 4{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 1{,}8x = 4{,}5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0{,}6 \times 2{,}5 \\ x = 2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1{,}5 \\ x = 2{,}5 \end{cases}$
(14)	Como podemos confirmar o resultado? **[PD]**	Pretende-se que os alunos encontrem uma estratégia que lhes permita confirmar o resultado obtido. Por exemplo, substituir as coordenadas encontradas numa das equações das retas obtendo uma proposição verdadeira.
Resposta: $I\ (2{,}5;\ 1{,}5)$		

Tarefa 10.

10. Relativamente à Figura 6, sabe-se que:

- o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C
- o ponto E pertence ao segmento de reta $[AB]$
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[AC]$
- o triângulo $[ADE]$ é retângulo em E

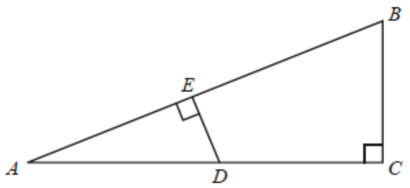


Figura 6

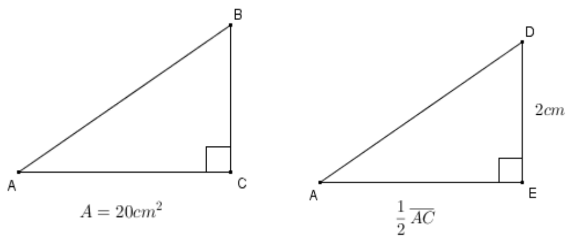
Sabe-se ainda que:

- $\overline{ED} = 2\,\text{cm}$
- $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$
- a área do triângulo $[ABC]$ é $20\,\text{cm}^2$

Determina $\overline{AC}$

Apresenta a tua resposta em centímetros.

Mostra como chegaste à tua resposta.

(15)	Como podemos encontrar $\overline{AC}$ com os dados fornecidos? **[PD]**	Pretende-se que os alunos reflitam sobre as informações que tenham e as interliguem de forma a encontrar uma estratégia para resolver o problema.
(16)	Uma vez que conhecemos $\overline{ED} = 2$ e existe uma relação entre $\overline{AE}$ e $\overline{AC}$ ($\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$), será que existe alguma relação entre os triângulos $[AED]$ e $[ABC]$? **[PC]** Que relação? **[PC]**	Pretende-se que os alunos concluam que os triângulos [ABC] e [ADE] são semelhantes, uma vez que $A\hat{E}D = A\hat{C}B = 90°$ e $E\hat{A}D = B\hat{A}C$.
(17)	Uma vez que os triângulos são semelhantes, o que podemos concluir acerca da relação existente entre as medidas dos seus lados? **[C-M]**	Pretende-se que os alunos recordem que quando dois triângulos são semelhantes então a medida dos lados correspondentes são diretamente proporcionais.  $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = r$ (*) $\frac{\overline{AC}}{\frac{1}{2}\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 4$ (**)
(18)	O que conhecemos agora do triângulo $[ABC]$ que nos permita determinar o comprimento de $[AC]$? **[PC]**	Pretende-se que os alunos integrem toda a informação conhecida e concluam que, ao conhecerem o valor da área do triângulo em causa é possível determinar o pedido. $A_{\Delta} = \frac{\overline{AC} \times \overline{CB}}{2} \Leftrightarrow 20 = \frac{\overline{AC} \times 4}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 10$ (***)
Resposta: O segmento de reta $[AC] = 10$ cm.		

Tarefa extra		
(19)	Sabendo que a área do triângulo $[ABC]$ é $20\ cm^2$, qual será a área do triângulo $[ADE]$? **[PD]**	Pretende-se que os alunos encontrem uma estratégia para determinar o pedido sendo capazes de a explicar, embora a finalidade será recorrer à relação existente entre a razão de semelhança entre os lados e entre as áreas de triângulos semelhantes. Tendo em conta que a razão de semelhança do comprimento dos lados é 2, a razão de semelhança da área é o seu quadrado, no caso, $2^2 = 4$. $\frac{A_{[ABC]}}{A_{[ADE]}} = 4 \Leftrightarrow \frac{20}{A_{[ADE]}} = 4 \Leftrightarrow A_{[ADE]} = 5$

Resposta: A área do triângulo $[ADE]$ é $5cm^2$.

<table>
<tr><td colspan="3">Tarefa 3.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Para um certo número inteiro k, a expressão 3^k é igual a $\left(\frac{1}{9}\right)^4$
Qual é esse número k ?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(20)</td><td>Será possível escrever a fração $\frac{1}{9}$ como uma potência de base 3? [C-M]</td><td rowspan="2">Pretende-se que os alunos identifiquem que a fração em causa pode ser escrita como uma potência de base $\frac{1}{3}$ e, por sua vez, esta pode ser escrita como uma potencia de base 3.</td></tr>
<tr><td>Será possível escrever 9 como uma potência de base 3? [C-M]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recordar…</td><td>Exemplos:
• $8^0 = 1$
• $2^{-1} = \frac{1}{2}$
• $5^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5^2}$

• $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4 = 2^2$
• $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = 4 \times (-2) = -8 = -(2^3)$

• $5^2 \times 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$
• $\frac{5^5}{5^4} = 5^{5-4} = 5$</td></tr>
<tr><td>(21)</td><td>Qual será o expoente? [PC]</td><td>Pretende-se que os alunos concluam, através da análise da informação fornecida, que o expoente será 2 perfazendo assim que o valor de k será -8.
$$\left(\frac{1}{9}\right)^4 = \left(\frac{1}{3^2}\right)^4 = \frac{(1)^4}{(3^2)^4} = \frac{1}{3^8} = 3^{-8}$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resposta: $k = -8$</td></tr>
</table>

Teste Intermédio 2013

Tarefa 5.		
5. Seja a um número maior do que 1 Qual das expressões seguintes é equivalente a $\frac{(-a)^8}{a^3}$? Transcreve a letra da opção correta. **(A)** $-a^5$ **(B)** $-a^{11}$ **(C)** a^5 **(D)** a^{11}		
(22)	Qual é a regra de operações com potências que nos permite responder à questão? **[C-M]**	Pretende-se que os alunos façam apelo à memória e indiquem a regra da divisão de potências com a mesma base como resposta à pergunta. $\frac{(-a)^8}{a^3} = \frac{a^8}{a^3} = a^{(8-3)} = a^5$
Resposta: C		

Anexo 10 – Transcrição da aula do dia 10 de março

[Explicitação de vários assuntos extra aula, por parte da professora responsável pela turma, ocupando cerca de sete minutos]

Tarefa 8. do TI 2012

[A tarefa foi proposta para trabalho de casa, sendo que maioria da turma afirmou que realizou o trabalho de casa.]

Professora: Quais é que são os dados do problema que vocês têm e que nos permite desde já tirar conclusões? **[PC]** Ainda mesmo antes de ler o enunciado…

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (1)]*

A13: Que A e D são diâmetros e são iguais.

Professora: A e D ou o diâmetro é AD? **[Rh]**

[*Pretende-se que o aluno compreenda que referiu dois pontos quando deveria ter referido um segmento de reta, no caso, o segmento AD*]

A13: AD, que é o diâmetro, e EF são iguais.

[É escrito no quadro que $\overline{AD} = \overline{EF}$, explicitando a notação usada relativamente à indicação correta de retas, segmentos de reta e comprimento de um segmento de reta.]

A17: Sabemos que O é o centro…

Professora: E em relação às medidas que temos? **[PC]**

[*Pretende-se orientar os alunos para o objetivo em (1), uma vez que este ainda não está alcançado*]

A10: Temos um ângulo…

A17: ODE também é... 10 graus…

Professora: Porquê? **[PA]**

[*Pretende-se que os alunos justifiquem que $O\widehat{D}E = 10°$. De facto, como $\overline{OE} = \overline{OD}$ uma vez que são raios da circunferência, podemos concluir que o triângulo $[EOD]$ é isósceles sendo portanto $O\widehat{D}E = O\widehat{E}D = 10°$*] (i)

A17: Porque o triângulo é isósceles!

Professora: Porquê é que o triângulo é isósceles? **[PA]** E qual triângulo é que é isósceles? **[R]**

[*Pretende-se obter a justificação para a afirmação do aluno, contemplando o objetivo em (i), sendo a segunda pergunta colocada para confirmar que a identificação do triângulo está correta*]

A17: Porque tem dois lados que são raios da circunferência. E por isso podemos também dizer que o outro ângulo é 160 graus.

[*É escrita no quadro a justificação que permite concluir que o triângulo* $[EOD]$ *é isósceles, tal como descrito em (i)*]

A17: Então o outro também é 160. O angulo EOD.

Professora: O ângulo EOD é quanto? **[R]**

[*Pretende-se confirmar o que o aluno afirmou*]

A17: 160 graus.

A19: [*impercetível*] … o arco FD vai ser…

Professora: Diz lá novamente, o arco FD vai ser o quê? **[R]**

[*Pretende-se confirmar o que o aluno afirmou*]

A19: 20.

Professora: Porquê? **[PA]** Porque é duas vezes…

[*Pretendia-se que o aluno justifica-se que, como* $F\hat{E}D = 10°$ *e este é um angulo inscrito na circunferência, então o arco* FD *é dobro deste ângulo. No entanto, a justificação foi iniciada perdendo-se a natureza da pergunta colocada e diminuindo o seu nível cognitivo*]

A19: Porque é duas vezes… depois como é um ângulo inscrito, o ângulo… [*impercetível na gravação, mas o aluno justificou convenientemente*]

Professora: Exatamente!

A13: Também podemos dizer que com a tangente que passa no centro da circunferência temos dois ângulos de 90 graus.

Professora: Então mas estamos só a analisar a circunferência. E o que sabemos acerca das medidas do retângulo? **[PC]** Podemos saber alguma coisa? **[PC]**

[*O objetivo em (1) continua perdido urgindo a necessidade de focar mais as perguntas para os alunos compreenderem o que se pretende*]

A20: [*impercetível*]

Professora: Já sabemos que o segmento AD é um diâmetro da circunferência e que é também o quê em relação ao retângulo? **[PC]**

[*Pretende-se, mais uma vez, orientar para o objetivo (1), especificamente pretende-se que os alunos concluam que* $\overline{AD} = 2r$]

A21: O CD e AB têm de ser metade! Porque é o raio.

Professora: Volta-me a dizer o que acabaste de concluir para eu escrever no quadro. **[R]**

[*Pretende-se que o aluno repita o que tinha proferido*]

A21: CD é igual a AB que é igual a …pois… as medidas… isso é as medidas…

Professora: Quero relações entre as medidas que estão na figura, sem valores numéricos. **[R]**

[*Pretende-se reforçar que o que está em causa é obter a relação entre as medidas da figura que contempla duas figuras relacionadas no que diz respeito às suas medidas, mas que não implica valores numéricos*]

A21: …que é igual ao raio!?

Professora: E o raio, consegues traduzir por alguns segmentos? **[C-M]**

[*Pretende-se que o aluno conclua que o raio da circunferência é a largura do retângulo*]

A21: $OD, AO, OE, \ldots$

A17: A tangente… faz um ângulo de 90°… [*impercetível*] é perpendicular a BC [*impercetível*]. Logo a largura [do retângulo] vai ser o raio [da circunferência].

Professora: Exatamente! Logo a largura do retângulo vai ser metade do comprimento. Então como é que posso escrever? **[C-M]**

[*Pretende-se que os alunos identifiquem na figura os segmentos que estão a ser considerados*]

A13: É metade de AD e de BC!

[*Reforço da importância de retirar os dados do problema antes de prosseguir para a sua resolução precipitada*]

Tarefa 8.1.

[*Leitura do enunciado*]

Professora: Dão-nos o perímetro do retângulo e querem saber o comprimento da circunferência. O que quer dizer determinar o comprimento da circunferência? **[C-M]** O que é que eles pedem? **[C-M]**

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (2)]*

A17: Eu acho que é o perímetro.

Professora: Qual é que é a expressão do perímetro da circunferência? **[C-M]**

[*Pretende-se relembrar a expressão do perímetro de uma circunferência de raio r, apesar de ser dado no formulário de momentos de avaliação externa*]

A10: $2 \cdot \pi \cdot r$

Professora: O que precisamos de encontrar? **[PC]** Temos tudo para determinar o perímetro? **[PC]**

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (3)]*

A14: Falta-nos raio, que é metade do comprimento [*impercetível*].

Professora: Como podemos encontrar o raio então? **[PC]**

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (4)]*

A21: Pelo perímetro do retângulo! A largura é o diâmetro, *né*? E a altura é o raio.

A13: Então se descobrirmos a altura, ou a largura, vamos saber o raio, que é o que nós precisamos.

Professora: Exatamente, então e como é que podemos determinar? **[PD]**

[*Pretende-se que os alunos façam a integração de toda a informação fornecida tal como no objetivo (4)*]

[*Muitos alunos discutem estratégias em voz alta sem ficar algo explícito*]

Professora: Então o que é que sabemos? **[PC]**

[*Pretende-se orientar os alunos para analisarem os dados de forma a responderem ao pedido.*]

Professora: Como é que dado o perímetro desta figura [*apontando para o quadro onde estaria desenhado um retângulo*]? **[C-M]**

[*Pretende-se relembrar a expressão do perímetro de um retângulo, apesar de ser dado no formulário de momentos de avaliação externa*]

A18: É tudo!

A17: É somar todos os lados.

[*Escrita no quadro do perímetro da figura, ficando algo idêntico a* $2r + 2r + 2r = 30$]

Professora: Então e quanto dá $2r + 2r + 2r$? **[Rh]**

[*Pretende-se chamar a atenção dos alunos para a resolução da tarefa de modo a estes não se distraírem*]

A17: $6r$!

[*Resolução da etapa, isto é,* $6r = 30 \Leftrightarrow r = 5$, *concluindo que o raio da circunferência é 5 cm*]

Professora: Já sabemos o raio. E agora? **[PC]** Já está resolvido? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos compreendam que determinar o raio não é o pedido mas sim determinar o comprimento da circunferência, tarefa que se torna simplificada com o conhecimento do valor do raio da mesma*]

A9: Agora é só substituir na fórmula.

Professora: Qual fórmula? **[PC]**

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (5)]*

A14: Do perímetro do círculo!

A13: $2 \cdot \pi \cdot r$

[*Resolução da etapa, isto é,* $P = 2 \times \pi \times 5 \cong 31{,}42$]

[*Explicação do procedimento de arredondamento uma vez que no enunciado pedia para, nos cálculos intermédios, conversar, no mínimo, duas casas decimais e, na resposta, apresentar o resultado em centímetros arredondado às décimas*]

Professora: Era isto que pedia? **[R]**

[*Pretende-se que os alunos confirmem que a tarefa está de facto resolvida, faltando apenas a resposta*]

Alunos: Sim.

[*Reforço da importância da resposta nas tarefas que resolvem*]

Professora: Há dúvidas até aqui? **[R]**

[*Pretende-se esclarecer eventuais dúvidas que tenham ficado pendentes*]

Tarefa 8.2.

Professora: Vamos agora determinar a amplitude de uma rotação, neste caso, de centro em O e que transforma o ponto F no ponto A. Primeiro que tudo, o que é uma rotação? **[C-M]**

[*Pretende-se que os alunos relembrem que uma rotação é uma isometria e que, para a descrever é necessário conhecer o centro da rotação, a amplitude do ângulo de rotação e ainda o sentido deste. Pretende-se assim alcançar o objetivo em (7)*]

A13: É uma transformação que nós aplicamos num objeto, ou numa letra, e transformamos noutra!

Professora: É uma isometria. Lembram-se? **[Rh]** E o que precisamos para definir uma rotação? **[C-M]**

[*Pretende-se que os alunos alcancem o objetivo em (7), recordando o que é efetivamente uma rotação e o que é necessário para a definir*]

A17: De um centro.

A13: Temos que ter um centro, que é o centro de rotação… e temos que saber quanto é que vamos rodar…

Professora: Então, talvez seja melhor escreverem no vosso caderno isto que estamos a dizer. [*Escrita no quadro das informações necessárias para descrever uma rotação, propondo aos alunos que revejam, em casa, as restantes isometrias*] Falta ainda uma coisa muito importante que é o sentido da rotação!

[*Elucidação dos sentidos positivo e negativo da rotação, baseado num esquema feito no quadro*]

Professora: Alguma dúvida em relação às rotações? **[R]** Ficou percebido? **[R]**

[*Pretende-se esclarecer eventuais dúvidas que tenham ficado pendentes*]

A9: Professora, se for o sentido negativo temos que meter lá o menos?

[*Alguns alunos trocam impressões sobre a amplitude do ângulo encontrado levando a alguma confusão entre os conceitos de ângulo e de arco urgindo assim a necessidade de uma explicitação mais pormenorizada do assunto e realçando que, na tarefa em causa, é indiferente determinar o ângulo maior ou o mais pequeno, desde que o sentido esteja bem definido*]

Professora: Então como é que vocês chegaram lá? **[PA]**

[*Uma vez que a tarefa já tinha sido proposta para trabalho de casa e os valores encontrados do ângulo pedido eram distintos de aluno para aluno, pretende-se que os alunos justifiquem o seu método de resolução. Note-se que existem dois processos distintos considerados válidos para a resolução deste exercício e que levam igualmente a dois valores distintos para a amplitude pedida, dependendo do sentido que for considerado*]

Professora: O que é que temos? **[PC]** Já chegámos à conclusão que eles querem transformar o ponto F no ponto A. Então, o que é que nós temos que nos permite calcular a amplitude dessa rotação? **[PC]**

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (8)*]

A21: ODE! Que é 10 graus!

A18: [*impercetível*] … ângulo raso…

Professora: Qual é que é o ângulo raso? **[C-M]**

[*Pretende-se que o aluno identifique corretamente o ângulo raso na figura e que este seja conveniente para a resolução da tarefa*]

A21: O arco AOD é 180 graus.

Professora: Mais? **[PC]**

[*Pretende-se que os alnos integrem a informação já conhecida de forma a concluir sobre o pedido*]

A20: [*impercetível*] é um ângulo inscrito...

Professora: E o que é que isso permite concluir? **[PD]**

[*Pretende-se que os alunos explicitem melhor o que estão a concluir, justificando todas as conclusões a que chegam*]

A23: O arco FD vai ser [*impercetível*]

Professora: Qual é que é o arco? **[R]**

[*Pretende-se confirmar o que o aluno afirmou*]

A23: AOF é 160 graus.

Professora: Porque é que é $160°$? **[PA]**

[*Pretende-se que os alunos justifiquem as conclusões a que chegam, no caso, o arco FA é dado pela diferença entre os arcos AD e FD, onde $AD = 180°$ e $FD = 20°$*] (ii)

A23: Porque é $180 - 20$ que dá 160.

Professora: Ah! Então vamos lá justificar todas as conclusões!

[*Escrita no quadro da justificação em (ii), tal como o aluno afirmou*]

Professora: Nós queremos a amplitude da rotação que transforme o ponto F no ponto A… mas o que é que isso quer dizer? **[PC]** Do que andamos à procura exatamente? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos compreendam que a tarefa apenas exige a determinação do ângulo que transforma o ponto F no ponto A, independentemente do sentido considerado*] (iii)

A13: Da rotação!

Professora: Sim, mas a rotação é definida por três coisas… **[C-M]**

[*Pretende-se chegar ao objetivo em (iii) uma vez ainda não alcançado*]

A13: Da amplitude do ângulo que vamos…

Professora: De qual ângulo? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos façam uma correta identificação do ângulo a determinar, no caso, $F\hat{O}A$*]

Alunos: Do ângulo FOA!

Professora: Já estamos perto do pedido ou não? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos compreendam que, ao determinar a amplitude do ângulo $F\hat{O}A$ chegam ao pedido, isto é, a amplitude da rotação de centro O que transforma o ponto F no ponto A*]

Alunos: Já encontrámos!!

Professora: Toda a gente chegou até aqui? **[R]**

[*Pretende-se esclarecer eventuais dúvidas que tenham ficado pendentes e perceber se toda a turma está ao mesmo nível*]

A13: Também há outra maneira!

Professora: Sim, já lá vamos. Qual é que seria a resposta? **[R]**

[*Pretende-se reforçar a importância da resposta na tarefa proposta*]

Alunos: A amplitude da rotação que transforma… o ponto F no ponto A é…

A9: 160.

A17: Professora, e se tivéssemos feito…

Professora: Sim, já vamos ver. De facto, existem outras estratégias para encontrar o ângulo, não existem? **[PD]**

[P*retende-se que os alunos compreendam e pensem noutras estratégias para determinar o pedido, sendo que nenhuma das resoluções está mais ou menos correta que outra*]

A13: Sim!

Professora: Queres dizer como fizeste? [*pergunta dirigida ao aluno A13 uma vez que este se mostrou disponível para explicar o seu raciocínio (distinto do realizado em comum com a turma)*]

[*O aluno explica o seu raciocínio enquanto a professora estagiária vai escrevendo no quadro de modo a toda a turma acompanhar a resolução alternativa*]

A11: Aí tínhamos que pôr o menos!

Professora: Resposta: A amplitude … é… **[R]**

A13: -200 graus.

Professora: Toda a gente percebeu? **[R]** E toda a gente passou as duas formas de resolver? **[R]**

[*Pretende-se esclarecer eventuais dúvidas que tenham ficado pendentes e confirmar se o trabalho feito até então fora copiado para o caderno*]

[*É feito um novo reforço da importância da resposta e da indicação do sinal do ângulo, assim a utilização de uma estratégia de confirmação.*

De seguida, a professora estagiária circulou pela sala para explicitar dúvidas individuais enquanto a restante turma copiava pelo quadro as resoluções feitas]

Tarefa 8.3.

Professora: Então e agora a alínea 8.3., qual é que é a resposta e porquê? **[C-M]**

[*A tarefa em causa é uma escolha múltipla e pretende-se que os alunos justifiquem a sua escolha, especificamente afirmando que o ponto O é o centro da circunferência logo pertence à mediatriz de qualquer corda, fazendo recusar todas as respostas dadas exceto a B*] (iii)

A16: Então…é a B…

Professora: Porquê? **[C-M]**

[O aluno A16 justifica a escolha dizendo porque escolheu a resposta B e indicando as razões pelas quais as restantes respostas não estavam corretas]

Professora: Toda a gente percebeu? **[R]**

[*Pretende-se esclarecer eventuais dúvidas que tenham ficado pendentes*]

Tarefa 6. do TI 2012

Professora: Então vamos ver o que temos… já leram? **[R]**

[*Pretende-se percebe se os alunos já leram e compreenderam o enunciado da tarefa para puder prosseguir*]

Alunos: Não!

Professora: Então temos: [*leitura do enunciado, escrevendo no quadro os dados da tarefa*]

A13: Podemos já dizer qual é o tipo de função…

Professora: Podemos então dizer já que tipo de funções é que são, então quais é que são? **[C-M]**

[*Pretende-se que os alunos recordem o tipo de funções que já conhecem (função afim, função linear, função de proporcionalidade inversa e função quadrática)* *de modo a identificarem corretamente as funções consideradas na tarefa, quer a nível gráfico, quer a nível da sua expressão algébrica. No caso, a reta r é definida por uma função linear e a reta s por uma função afim*] (iv)

A17: A primeira é uma função linear.

Professora: E a segunda? **[C-M]**

[*Pretende-se ainda a identificação correta do tipo de funções que estão a ser consideradas na tarefa, tal como descrito em (iv). Subentende-se que por "primeira" os alunos se refiram à primeira expressão algébrica que é dada no enunciado, isto é, a reta r e, de forma análoga, a "segunda".*]

Alunos: É uma função afim!

[*Proposta de revisão de conteúdos: tipos de funções já conhecidas, no caso, função afim, função linear, função de proporcionalidade inversa e função quadrática.]*

[*É feita uma breve revisão das características da função afim e da função linear, com escrita no quadro, de modo a não existirem dúvidas quanto à sua forma na continuidade da resolução da tarefa*]

Tarefa 6.1.

[*Enunciado: Qual é a ordenada do ponto B?*]

Professora: Qual é a resposta imediata que vocês dão? **[PC]**

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (10)*]

A18: 4,5!

Professora: Porquê? **[PA]**

[*Pretende-se que os alunos justifiquem a chegada ao valor afirmado, sendo que podem optar pela estratégia descrita no objetivo em (10) ou por outra que considerem, por exemplo, a descrita no objetivo em (11)*]

A23: [*impercetível, no entanto a professora estagiária percebeu e direcionou a pergunta*]

Professora: Substituir por zero o quê? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos sejam mais claros a sugerir as estratégias de modo a evitar erros, por exemplo, na identificação da reta ou da coordenada a substituir*] (v)

A23: O x.

Professora: Onde? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos identifiquem corretamente o que necessitam de fazer para determinar o pedido, tal como descrito em (v)*]

A23: [*impercetível*]

Professora: Em qual reta, diz lá. **[R]**

[*Pretende-se confirmar o que o aluno afirmou, uma vez que foi impercetível para a professora estagiária*]

A23: Na s.

[*Realização da substituição proposta pelo aluno, ficando no quadro a resolução da etapa:* $y = -1{,}2 \times 0 + 4{,}5 = 4{,}5$]

Professora: Então mas escusávamos de fazer isto. O que é que vimos em relação ao parâmetro b [na equação da reta de uma função afim]? **[C-M]**

[*Pretende-se que os alunos façam a associação como descrito em (10)*]

A13: É a ordenada na origem!

Professora: Então se temos uma função deste tipo, que é uma função quê? **[C-M]**

[*Pretende-se orientar o pensamento dos alunos para alcançar o objetivo (10). As perguntas seguintes servem para o mesmo efeito. A pergunta não foi bem colocada uma vez que não transparece clareza. Dever-se-ia ter perguntado, por exemplo "Como é que se denomina uma função deste tipo?"*]

A13: Função afim!

Professora: Então o que podemos logo concluir sem fazer a substituição? **[PC]**

Alunos: [*impercetível*]

Professora: Vocês olham para a expressão da função, olhando para o gráfico vocês vêm que o ponto B interseta o eixo dos…? **[R]**

A13: yy

Professora: Dos yy, então significa que, olhando para aqui, imediatamente se vê que…? **[C-M]**

Aluno: O b é 4,5!

Professora: Que o b é 4,5, pois este é o parâmetro que nos indica qual a ordenada onde a reta vai intersetar o eixo dos yy.

[*Explicitação de uma dúvida colocada pelo aluno A14 que não se relaciona diretamente com a tarefa em causa*]

Tarefa 6.2.

Professora: Então, como é que podemos encontrar o comprimento do segmento $[AO]$? **[PC]**

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (12)*]

A21: O A!

Professora: O ponto A? **[R]**

[*Pretende-se reforçar a ideia que o importante é encontrar as coordenadas do ponto A, nomeadamente a sua abcissa uma vez que o ponto pertence ao eixo das abcissas logo a sua ordenada é nula*]

A9: Sim…

A21: O ponto O é a origem!

A16: [*impercetível*] … por causa da reta!?

[*Explicação da dúvida colocada pelo aluno A16 ainda relativa à alínea anterior. O aluno em questão estava atrasado a passar as resoluções pelo quadro pelo que precisou deste esclarecimento*]

Professora: Então, queremos as coordenadas do ponto A. Qual é a ordenada e qual é a abcissa? **[PC]**

[*Pretende-se ainda alcançar o objetivo em (12))*]

A21: Um é zero!

Professora: Qual deles? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos identifiquem corretamente qual é a coordenada nula e qual aquela que é necessário determinar, tal como referido no objetivo em (12)*]

A13: A ordenada é zero.

A21: A abcissa é que é zero.

A13: Não não, a ordenada é que é zero!

[*Discussão entre os alunos à volta do problema que surgiu, levando à elucidação do que era a abcissa (x) e a ordenada (y) de um ponto*]

Professora: Então afinal o que é que nós queremos determinar? **[R]**

[*Pretende-se retomar a resolução da tarefa recordando o pedido no enunciado*]

A17: O A!

A13: A abcissa do ponto A.

A13: Podemos fazer uma equação…!?

A17: Quando as coordenadas são, por exemplo, 1,5 e depois para separá-las também metemos uma vírgula?

Professora: Metemos um ponto e vírgula. Já lá vamos chegar. [*A professora estagiária deixa a dúvida do aluno sem exemplo pois a resposta já irá elucidar*] Quero determinar a abcissa do ponto A. E então, o que é que eu posso fazer para determinar a abcissa do ponto A? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos afirmem que basta substituir y por* 0 *na equação da reta s, isto é, na equação $y = -1{,}2x + 4{,}5$*] (vi)

A13: Substituir na expressão…

Professora: Em qual expressão? **[R]**

[*Pretende-se que os alunos identifiquem corretamente a reta à qual o ponto A pertence, tal como referido em (vi)*]

A13: Na função afim, que era a função s.

[*O aluno explica o procedimento tal como em (vi), sendo resolvido no quadro e chegando a $x = 3{,}75$*]

Professora: E porque é que fazemos isto? **[PC]** Voltem-me a explicar.

[*Pretende-se que os alunos reflitam novamente acerca dos procedimentos utilizados de forma a compreenderem a razão de substituir o y por* 0 *na equação da reta s*]

A13: Porque sabemos que a ordenada é zero.

[*Conclusão do procedimento no quadro*]

Professora: E agora o que é que eu faço? **[PC]** Já está resolvido o problema? **[R]**

[*Pretende-se que os alunos retomem o enunciado percebendo que a tarefa já está resolvida com a conclusão da substituição*]

A10: Já!

Professora: Porquê? **[PA]**

[*Pretende-se que que os alunos justifiquem tal como referido no objetivo (12*]

A13: Já sabemos a abcissa do ponto A e … [impercetível].

Professora: Então, neste caso, a resposta é a…? **[R]**

[*Pretende-se que os alunos identifiquem a resposta correta uma vez que se trata de uma escolha múltipla*]

A13: É a B!

Tarefa 6.3.

Professora: Quero que pensem, como é que podemos encontrar as coordenadas do ponto I? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos compreendam que o ponto I é a intersecção de ambas as retas consideradas na tarefa, logo as suas coordenadas podem ser determinadas através da resolução de um sistema ou iniciando com a resolução da equação* $0{,}6x = -1{,}2x + 4{,}5$ *e de seguida substituindo o valor de x encontrado numa das duas equações das retas, tal como descrito no objetivo em (13)*]

[*Explicitação de dúvidas individuais no lugar de cada aluno, dando tempo para a restante turma refletir sobre a tarefa*]

Professora: Então como é que podemos então encontrar o ponto I? **[PC]**

[*Pretende-se retomar a pergunta inicial agora que já é suposto os alunos conhecerem o enunciado*]

Alunos: Igualar!

Professora: Mas igualar o quê? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos sejam explícitos e, no caso, refiram que é igualar as expressões das funções r e s uma vez que o ponto I resulta da interseção dessas duas retas*]

A9: As condições…

Professora: Quais condições? **[R]** Funções? **[R]**

[*Pretende-se alcançar novamente o objetivo em (12)*]

A14: A função s [*impercetível*]

A9: $-1{,}2x + 4{,}5 = 0{,}6x$

Professora: Muito bem!

[*É resolvida a equação no quadro, recordando a resolução de sistemas de equações e concluindo assim a tarefa*]

[*O aluno A13 pede para resolver outro sistema para que fique consolidado este procedimento, pelo que se dá início à resolução da Tarefa 9. do TI2013, como consequência*]

[*A professora estagiária termina a aula com a proposta de algumas tarefas como trabalho de casa*]

Anexo 11 – Transcrição da aula do dia 12 de março

[*Devido a uma atividade extracurricular, pouco menos de metade da turma não estava presente*]

Correção do TPC - Tarefa 9. do TI2013

[*A tarefa foi proposta para trabalho de casa no seguimento do pedido do aluno A13 no final da aula anterior (ver final da aula do dia 10 de março de 2014). A sua correção ocupou cerca de vinte e cinco minutos*]

Tarefa 10. do TI 2012

Professora: O que é que eu comecei a fazer na outra aula logo no início da resolução dos problemas? **[C-M]**

[*Pretende-se perceber se os alunos compreenderam o método de resolução de problemas trabalhado na aula anterior, fazendo apelo à memória. No caso, pretende-se que os alunos refiram o primeiro momento: retirar os dados do problema*]

A11: Retirar os dados!

Professora: Então comecem a retirar os dados.

[*Explicitação de dúvidas individuais no lugar de cada aluno, dando tempo para a restante turma refletir sobre a tarefa*]

Professora: Então vamos lá ver o que temos: [*Leitura do enunciado e respetivo desenho da Figura 6 no quadro, colocando as informações dadas no desenho concebido*]

Professora: O que é que sabemos mais? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos retirem todos os dados do enunciado, compreendendo que existem relações os comprimentos dos lados dos triângulos considerados ($\overline{ED} = 2\ cm$ e $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$) e identificando que a área do triângulo $[ABC]$ é $20\ cm^2$*]

Alunos: [*Vários alunos dão palpites sendo impercetível na gravação embora percetível para a professora estagiária no momento*]

Professora: Que a área do triângulo ABC é $20cm^2$ … e queremos encontrar o comprimento de AC. Sugestões? **[PD]**

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (15)]*

A17: Semelhança de triângulos!

A19: Se sabemos que ED é 2 e virarmos o triângulo ao contrário, então BC é 4!

Professora: Porquê? **[PA]** Porque é que é 4 o BC? **[PA]**

[*Pretende-se que os alunos justifiquem a afirmação feita, defendendo o seu ponto de vista. Pretende-se então alcançar os objetivos em (15), (16) e (17)*]

A19: Porque é metade…

Professora: E então? **[PA]**

[*Pretende-se ainda a justificação descrita em (15), (16) e (17). A pergunta não foi bem colocada uma vez que dá azos a dúvidas aos alunos sobre o que a professora estagiária de facto pretende. Deveria ter sido colocada doutra forma mais percetível, por exemplo, "Como concluíste que é metade? Consegues justificar a tua afirmação?"*]

A19: [*impercetível*]

Professora: Tu tens que justificar com algo que a tua colega disse… Como é que se chama? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos afirmem que os triângulos considerados são semelhantes, tal como descrito no objetivo em (16). A pergunta não foi bem colocada uma vez que dá azos a dúvidas aos alunos sobre o que a professora estagiária de facto pretende. Deveria ter sido colocada doutra forma mais percetível, por exemplo, "Será que existe alguma relação entre os triângulos? Que relação existe entre eles?"*]

A17: Semelhança de triângulos!

Professora: Primeiro que tudo, eles são semelhantes? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos respondam afirmativamente, repensando como podem justificar a resposta dada.*]

A17: São.

Professora: Porquê? **[PA]** É preciso justificar…

[*Pretende-se chegar ao objetivo em (16) uma vez ainda não alcançado*]

A11: Professora, pode relembrar o que é semelhança de triângulos?

Professora: Ok, já lá vamos. Quando é que dois triângulos são semelhantes? **[C-M]**

[*Pretende-se que os alunos relembrem os critérios de semelhança de triângulos que conhecem. É então feita uma revisão dos conteúdos relacionados com a semelhança de de triângulos, relembrando assim os critérios de semelhança dos mesmos*]

Professora: Então e estes dois triângulos são semelhantes porquê? **[PA]** Qual é o critério que vamos usar e onde é que se pode ver… **[PC]**

[*Com a primeira pergunta pretende-se que os alunos justifiquem o facto dos triângulos considerados serem semelhantes.Com a segunda pergunta, o nível cognitivo da primeira baixa significativamente uma vez que dirige a resposta dos alunos, não deixando margem para a discussão de outras direções*]

A21: AA!

A17: AA

Professora: É o critério que relaciona os ângulos sim…

A17: Têm dois de… [*aluno interrompido pelo colega*]

A21: 90 graus!

Professora: Temos dois ângulos retos, sim, então $BCA = DEA = 90°$. E qual é o outro ângulo que é igual em ambos os triângulos? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos identifiquem corretamente na figura o ângulo que é comum a ambos os triângulos considerados, no caso,* $E\hat{A}D = B\hat{A}C$] (vii)

Aluno: CAB

Professora: Sim, que no outro triângulo corresponde a…? **[PC]**

[*Pretende-se ainda concluir o objetivo em (vii)*]

Aluno: DAE

[*Escrita no quadro da conclusão da justificação do facto dos triângulos serem semelhantes*]

Professora: $BAC = BAE$. Ou seja, os triângulos são semelhantes. O que é que fazemos agora? **[PD]**

Professora: Já sabemos que os triângulos são semelhantes e portanto, os comprimentos dos lados são diretamente proporcionais…

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (17)*]

A18: Fazer a área do triângulo…

Professora: Qual triângulo? **[R]**

[*Pretende-se que o aluno seja mais explícitos de forma a que toda compreenda o seu raciocínio com o objetivo de criar uma possível discussão*]

[*Discussão impercetível entre os alunos*]

Professora: O que é que temos? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos interliguem as informações que já detêm com o que é necessário determinar, estabelecendo associações entre os dados*]

A18: A área do triângulo grande.

Professora: Então se quisermos escrever a expressão da área do triângulo maior, como é que fica? **[PC]**

[*Pretende-se orientar a resolução da tarefa de forma a não dispersar, daí ser colocada uma pergunta de nível cognitivo baixo para apelar aos processos mentais*]

A16: Área é igual a base vezes a altura…

Professora: Traduzindo para as incógnitas que temos na figura… **[R]**

[*Pretende-se que os alunos identifiquem corretamente a base e a altura no triângulo considerado*]

A17: $AC \times BC\ldots$ a dividir por 2.

[*Explicitação de uma dúvida individual do aluno A17 que não se relaciona diretamente com a tarefa em causa. A sua elucidação ocupou cera de quinze minutos*]

Professora: Chegámos à conclusão que os triângulos são semelhantes. Se eles são semelhantes, os comprimentos dos lados são diretamente proporcionais. O que é que isto significa? **[PC]** Pode ser, por exemplo, um lado medir 2 e no outro triângulo o lado correspondente medir 4.

Professora: Depois disto, podemos sempre determinar a razão de semelhança entre os lados, que é o que estamos a fazer aqui! Em cima, reparem, meti os lados do triângulo maior!

[*Pretende-se que os alunos compreendam que só se pode concluir acerca da proporcionalidade entre os lados correspondentes dos triângulos caso estes sejam semelhantes. Por outro lado, a pergunta colocada perde o seu sentido quando a professora estagiária lhe responde, dando um exemplo e sem dar tempo para que os alunos responsam por si*]

Alunos: Ah! Já sei!

Professora: Fez-se luz? **[Rh]** Então vá!

[*Perante a reação dos alunos, a professora estagiária pretende compreender se de facto se recordam do conteúdo que está a ser trabalhado, no caso, a semelhança de triângulos aplicada aos comprimentos dos lados dos mesmos, relacionando-se de forma direta em termos de proporção*]

[*Escrita no quadro das razões entre os lados dos triângulos de forma a chegar à razão de semelhança*]

Professora: Então agora eu vou comparar os lados do triângulo maior com os lados do triângulo mais pequeno. Mais não é *ao calhas*! Se o segmento AB é a hipotenusa, neste caso, é o lado que se opõe ao ângulo reto do triângulo grande, qual é que é o lado que se opõe ao ângulo reto do triângulo pequeno? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos façam uma associação correta dos lados dos triângulos correspondentes, tal como feito no objetivo em (17)*] (viii)

Alunos: AD!

Professora: E agora aqui? **[PC]** Qual é o lado no triângulo pequeno que corresponde ao AC? **[PC]**

[*Pretende-se ainda concluir o objetivo em (viii)*]

Alunos: AE!

Professora: E relativamente ao BC? **[PC]**

[*Pretende-se ainda concluir o objetivo (viii). A professora estagiária deveria ter deixado explícito que se referia ao segmento BC, embora, no seguimento da aula, esteja subentendido*]

Aluno: [*impercetível na gravação, mas o aluno respondeu corretamente*]

[*No quadro ficou o seguinte:* $r = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$ (*)]

Professora: Percebido até aqui? **[R]**

[*Pretende-se esclarecer eventuais dúvidas que tenham ficado pendentes*]

Professora: Então mas agora há medidas que conhecemos, não há? **[PC]** Sim ou não? **[R]**

[*Pretende-se que os alunos, perante as igualdades que permitem determinar a razão de semelhança entre os comprimentos dos lados dos triângulos considerados, identifiquem os lados conhecidos de forma a efetivamente encontrar um valor para a razão de semelhança. Nenhum aluno respondeu à pergunta.*]

Professora: Então, lembram-se do que nós queríamos? **[R]** Determinar o… **[R]**

[*Pretende-se que os alunos não descuidem o objetivo primordial da tarefa: determinar* $\overline{AC}$]

A23: AC!

Professora: Então o AC ainda não conhecemos. E o AE, sabemos alguma coisa relativamente a este segmento? **[PC]**

[*Pretende-se encontrar a razão de semelhança entre os comprimentos dos lados dos triângulos considerados através da análise da figura, e substituindo as informações fornecidas na igualdade (*)*]

A23: Sim! Que é $\frac{1}{2}$ de AC!

Professora: Então o que podemos escrever aqui? **[PC]**

[*Pretende-se que seja feita uma substituição correta na igualdade (*)*]

Professora: E o $[AB]$ e o $[AD]$, sabemos alguma coisa acerca desses segmentos? **[PC]**

A18: Não!

Professora: Então vamos deixar ficar como está! $[BC]$ e $[DE]$, conhecemos alguma coisa? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos continuem a fazer uma substituição correta, tendo em consideração as relações que conhecem ou não*]

Alunos: Não!

Professora: BC até era o que nos dava jeito conhecer para substituir na expressão da área… Não era? **[R]** Então agora, para não sermos muito exaustivos, e porque não vale a pena determinarmos tudo, vamos pegar nas razões que nos dão jeito!

[*Pretende-se focalizar a atenção dos alunos no que é conhecido e o que se pretende determinar, ficando no quando a seguinte equação:* $\frac{\overline{AC}}{\frac{1}{2}\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{2}$ (**)]

Professora: Como é que podemos resolver agora? **[PD]** Diz! [*Dirigindo-se ao aluno A19, uma vez que este murmurou algo*]

[*Pretende-se que os alunos expliquem como deve ser simplificada a expressão do primeiro membro da equação (**) ou como deve ser resolvida a equação, uma vez que podem ser consideradas várias estratégias. Nenhum aluno respondeu*] (ix)

Professora: Não? **[R]**… Isto é uma equação! Como é que a podemos resolver? **[PC]**

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (ix), sendo que agora os alunos já sabem que se trata de uma equação, caso não tenham percebido até agora*]

[*Discussão impercetível entre alguns alunos*]

A18: Professora, se AE é metade de AC então 2 é metade de BC !

[*A professora estagiária respondeu afirmativamente ao aluno e não aproveitou a sua ideia para pedir uma justificação para a afirmação do aluno, envolvendo toda a turma, preferindo assim insistir na resolução da equação (**)*]

Professora: Então, nós queremos isolar o $\overline{BC}$, colocá-lo num dos membros. Como é que fica? **[PD]**

[*Explicação da simplificação* $\frac{\overline{AC}}{\frac{1}{2}\overline{AC}} = \overline{AC} \times \frac{2}{AC} = 2$, *através de exemplos sem incógnitas, uma vez que simplificar expressões com incógnitas ainda é algo pouco consolidado pela turma em geral, segundo o docente responsável pela turma*]

Professora: Então, afinal como é que fica o primeiro membro? **[PC]**

[*Pretende-se que, interligando os exemplos dados no momento imediatamente anterior,, os alunos sejam capazes de simplificar a equação (**) chegando à igualdade* $2 = \frac{\overline{BC}}{2}$ *que por sua vez equivale a dizer que o segmento* $\overline{BC}$ *mede* $4\ cm$]

Professora: Então? **[R]** É a mesma coisa! Diz lá! [*Dirigindo-se ao aluno A19, uma vez que este iniciou a resposta*] **[PC]**

[*Pretende-se ainda concluir o objetivo em (17)*]

A18: É 2!

Professora: Quanto é que mede o BC afinal? **[R]**

[*Pretende-se ainda concluir o objetivo em (17)*]

A18: 4!

Professora: Agora o que é que podemos fazer, já sabendo BC? **[PD]**

A21: Substitui-se [*impercetível/interrompido pelo colega*]

A18: Oh professora, não era mais fácil, se eles [os lados] são proporcionais, se um é metade de outro [referindo-se aos lados], então os outros são todos!

Professora: Mas como é que justificas? **[PA]** Tens que justificar! Isso está correto mas tens que escrever como é que concluis isso, justificando muito bem!

[*A professora estagiária decide neste momento aproveitar a intervenção do aluno A18 já feita anteriormente, aproveitando para elucidar acerca dos critérios de correção para esta questão em específico, ocupando cerca de dois minutos. Fica assim sem resposta a pergunta colocada, uma vez que a professora estagiária não exige uma resposta ao aluno, deixando-o a refletir sobre ela*]

Professora: Então temos que 20 é igual… diz! Que eu ao bocado interrompi-te… **[R]**

[*Pretende-se retomar a resolução adotada da tarefa, recorrendo ao aluno que estava a intervir antes da elucidação dos critérios específicos desta questão, no caso, o aluno A19*]

A17: É igual a $4 \times AC$…

[*Escrita no quadro a expressão da área do triângulo menor, já com os valores conhecidos substituídos, caindo na equação* $20 = \frac{\overline{AC} \times 4}{2}$ (***)]

Professora: E agora? **[C-M]**

[*Pretende-se que os alunos resolvam a equação (***), concluindo que* $\overline{AC} = 10$*, alcançando assim o objetivo em (18)*]

Alunos: [*resolvem oralmente a equação, chegando a* $\overline{AC} = 10$]

Professora: Até aqui está? **[R]** Sim? **[R]**

[*Pretende-se esclarecer eventuais dúvidas que tenham ficado pendentes*]

Tarefa extra:

Professora: Então agora quero-vos fazer uma pergunta: sem fazer cálculos, como é que vocês determinam a área do triângulo mais pequeno? **[PD]**

Professora: Não é para determinar as medidas dos lados! Também daria mas não é o objetivo! Pensem um bocadinho, como é que podemos determinar a área do triângulo pequenino com o que já conhecemos.

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (19)*]

[Explicitação de dúvidas individuais enquanto a restante turma reflete acerca da questão colocada]

Professora: Sugestões? **[PD]**

[*Pretende-se ainda concluir o objetivo em (19)*]

A18: Professora! É 5!

Professora: 5? **[PA]**

[*Pretende-se ainda concluir o objetivo em (19)*]

A18: É 20 a dividir por 4!

Professora: Porque é que é 20 a dividir por 4? **[PA]**

[*Pretende-se ainda concluir o objetivo em (19)*]

A18: Porque é… um meio ao quadrado!

[*O aluno A18 analisou os dados que tinha recordando que a razão dos comprimentos entre o triângulo maior e o triangulo mais pequeno é* $\frac{1}{2}$ *logo a razão entre as áreas dos triângulos considerados seria* $\frac{1}{4}$]

Professora: Porque é que a área do triângulo pequeno… o vosso colega disse que a área do triângulo mais pequeno é a quarta parte da área do triângulo maior. Porquê? **[PA]**

[*Pretende-se ainda concluir o objetivo em (19). Vários alunos tentam justificar sem se conseguirem explicar e tornando o som impercetível*]

Professora: Se a razão de semelhança dos comprimentos dos lados é 2, então a razão das áreas… **[C-M]**

[*Pretende-se orientar os alunos para atingir o objetivo descrito em (19)*]

A17: É o dobro!

Professora: Vai ser igual…. À razão de semelhança dos comprimentos dos lados do triângulo ao quadrado! Vocês perceberam? **[R]**

[*Pretende-se esclarecer eventuais dúvidas que tenham ficado pendentes*]

[*Conclusão da tarefa proposta, escrevendo no quadro todos os passos necessários para a resolução da tarefa proposta*]

Professora: Dúvidas? **[R]** Estás perdido? **[R]** Diz-me o que não percebeste! **[R]** **[***Dirigindo-se ao aluno A17***]**

[*Pretende-se esclarecer eventuais dúvidas que tenham ficado pendentes uma vez que a professora estagiária considerou que o aluno a quem se dirigiu não estava a compreender o que estava a ser efetuado*]

A17: Percebi percebi!

[*A professora sintetiza os trabalhos de casa, propondo ainda a revisão das regras das operações com potências como trabalho em casa, terminando assim a aula*]

Anexo 12 – Planificação 5: Monotonia e extremos de uma função (11.º ano)

Data prevista: 23 de abril de 2014

Objetivos gerais

- Relacionar o sinal da derivada com a monotonia.
- Resolver problemas simples de otimização.

Estrutura da aula

- Esquematizar o sinal da derivada em diferentes situações.
- Estudar os extremos relativos de uma função através do estudo da derivada dessa mesma função.
- Resolver tarefas de aplicação dos conteúdos estudados.

Recursos

- Computador, projetor e apresentação *.ppt.
- Ficha de apoio para o aluno.
- Tarefa de aplicação retiradas de um manual escolar (*Novo Espaço | Parte 2 | Matemática A 11º ano*)
- Manual escolar adotado.
- Lápis ou caneta.
- Máquina gráfica.

Desenvolvimento da aula

Primeira parte:

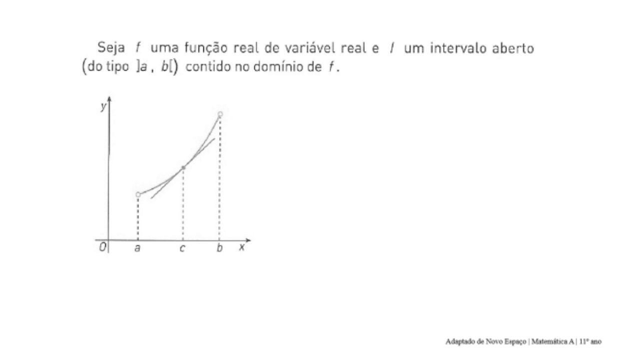
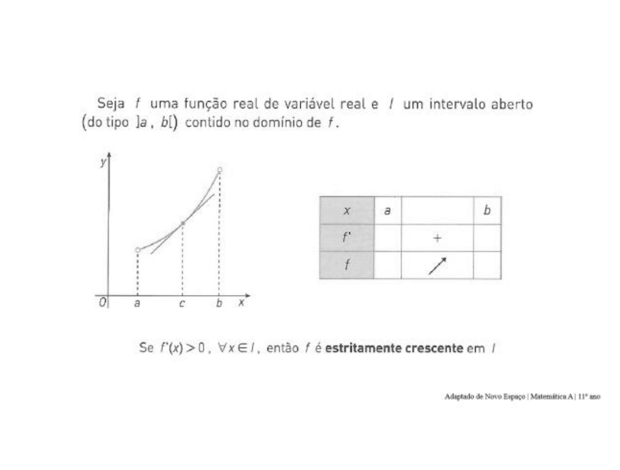
- Entrada dos alunos e acomodação na sala de aula.
- Escrita do sumário.

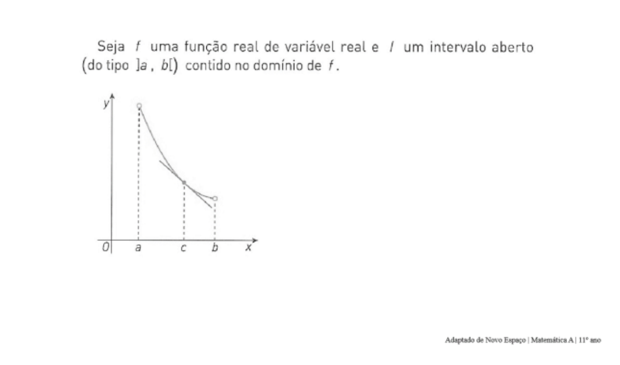
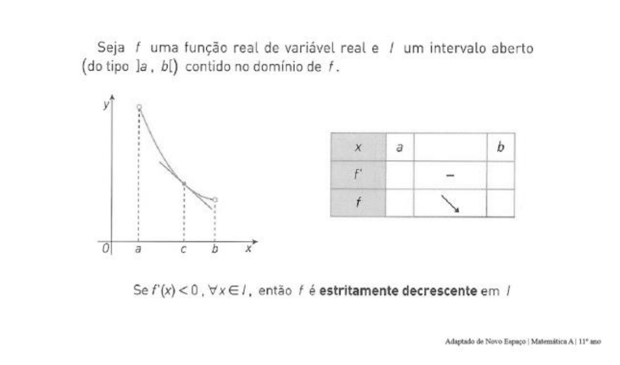
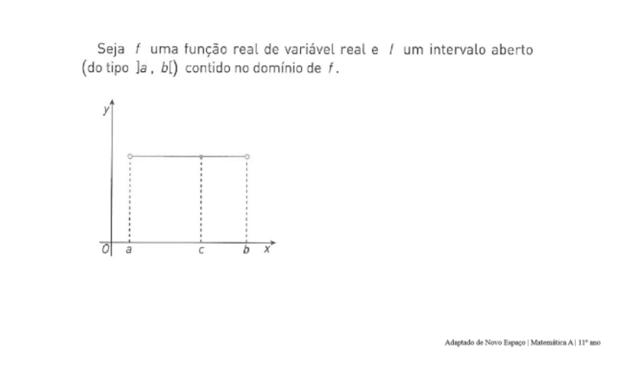
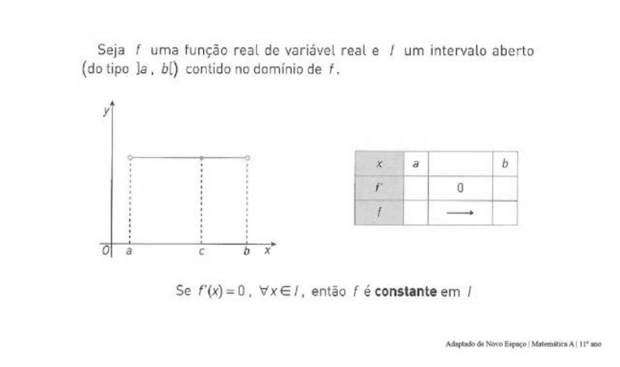
Monotonia e extremos de uma função.

Segunda parte:

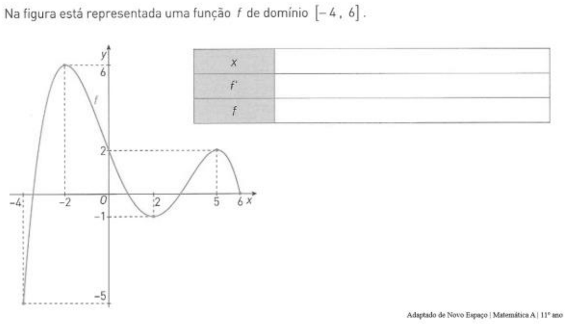
- Entrega de uma ficha de apoio aos alunos para que estes possam acompanhar a apresentação a seguir e tirarem conclusões.
- Início da apresentação de slides.

NOTA: Nesta parte da aula será feita uma apresentação de slides para que sejam mais rigorosas as representações gráficas.

<table>
<tr><th colspan="2">Sinal da derivada e sentido de variação de uma função contínua (revisão)</th></tr>
<tr><td>
</td>
<td>Como já visto nas aulas anteriores, se a derivada de uma função é positiva num dado intervalo, o que podemos concluir acerca da monotonia dessa função? [PC]
Pressupõe-se que os alunos imediatamente constatem que a função será crescente.</td></tr>
<tr><td>
</td>
<td>Vamos então agora construir um quadro, chamado quadro de variação, onde colocaremos o sinal da função derivada e a monotonia da função f.
Obs.: Caso os alunos questionem acerca do que se passará para os pontos de abcissa a e b, referir que o intervalo é aberto, logo a função não está definida nesses pontos.
Concluímos assim que:
Se $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in I$, então f é estritamente crescente em I.
Reforçar a ideia de que é necessário que os alunos tirem notas e passem para a ficha de apoio o que vai sendo projetado.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Da mesma forma, o que podemos concluir acerca da monotonia de uma função quando a derivada desta é negativa? [PC]</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Analogamente:
Se $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in I$, então f é estritamente decrescente em I.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>E quando a derivada da função f é nula em todos os pontos de um determinado intervalo? [PC]</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Conclui-se que:
Se $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in I$, então f é constante em I.</td>
</tr>
</table>

Extremos relativos de uma função a partir do estudo do sinal da derivada dessa mesma função



Vamos agora considerar a representação gráfica e, com base nas conclusões que acabámos de fazer, vamos construir um quadro de variação.

Então, quais serão os pontos onde a derivada da função muda de sinal? [PA]

Dever-se-á dar tempo aos alunos para pensarem na pergunta colocada e, de seguida, pedir a um aluno que vá indicar na tabela as abcissas dos pontos que considera importantes.

A tabela projetada deve ficar idêntica à seguinte:

x	-4		-2		2		5		6
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗		↘		↗			

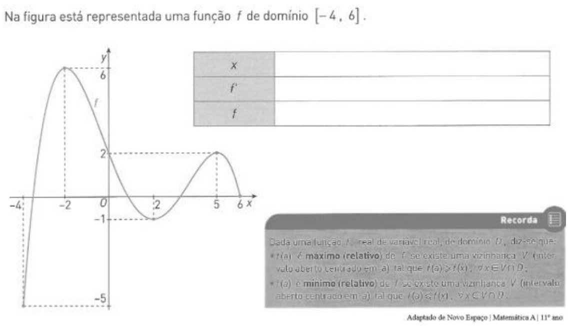
Tendo em conta a representação gráfica da função f, o que é que se passa nos pontos de abcissa -2, 2 e 5? [PC]

Pressupõe-se que os alunos identifiquem de imediato que são as abcissas dos extremos da função (maximizantes e minimizante).

E o que podemos concluir quanto à derivada nos pontos $x = -2$ $x = 2$ e $x = 5$? [PC]

Os alunos devem concluir que a derivada é nula nos pontos de abcissas que tornam a ordenada num extremo, ficando a tabela anterior idêntica à seguinte.

x	-4		-2		2		5		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	M	↘	m	↗	M	↘	

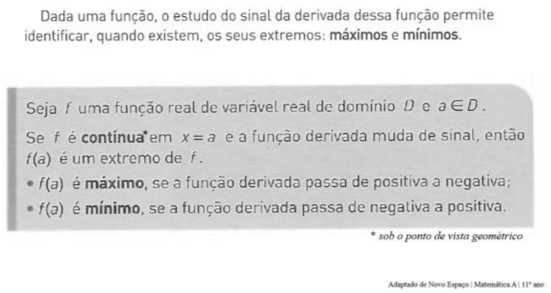


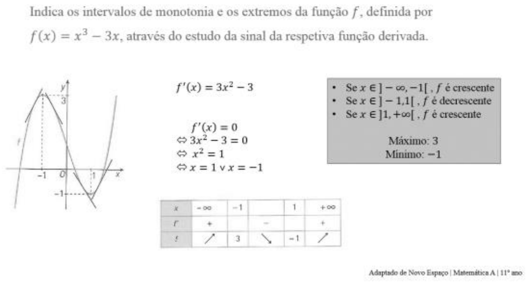
Porquê? [PA] Como sabemos que são extremos? [C-M]

Aqui deve ser recordada a definição de extremos (relativos).

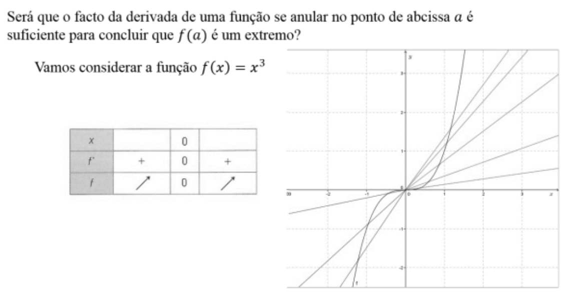
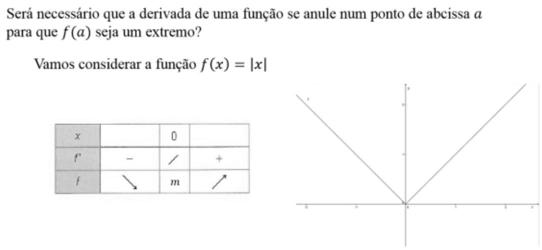
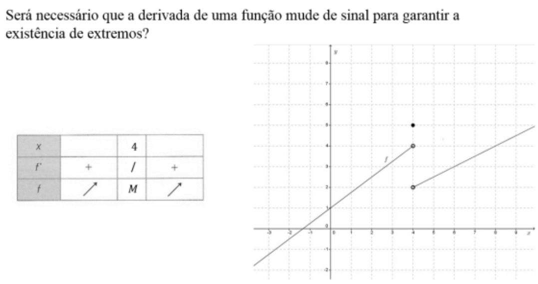
Não existirão outros extremos relativos no intervalo considerado? [PA]

Pressupõe-se que os alunos identifiquem -5 e 0 também como extremos da função, uma vez que o intervalo é fechado.

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>Concluímos assim acerca dos extremos de uma função, através do estudo do sinal da sua derivada.</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>
Vamos agora indicar a monotonia e os extremos da função f através do estudo do sinal da derivada.
O que temos que fazer primeiro? [PC]
Os alunos devem, de imediato, começar por encontrar a expressão da derivada da função f e, de seguida, encontrar os zeros da mesma.
Depois de encontrarmos os zeros da função derivada, como podemos concluir acerca dos intervalos de monotonia e dos extremos da função? [C-M]
Ao construírem o quadro de variação, devem concluir acerca dos intervalos de monotonia e dos seus extremos.
O slide a apresentar não aparece com as etapas todas resolvidas. Estas aparecem segundo o processo para encontrar os intervalos de monotonia e os extremos da função.
</td>
</tr>
</table>

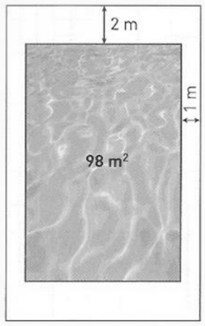
Alguns exemplos importantes	
	**Mas vejamos, será que $f'(a) = 0$ implica que $f(a)$ é um extremo? [PA]** **Vamos considerar a função $f(x) = x^3$. O que acham que acontece nesta situação? [PD]** De facto, embora a derivada em *x=0* seja nula, *f(0)* não é um extremo da função *f(x)*. Aliás, a derivada não muda de sinal, logo não podemos concluir acerca dos extremos da função.
	Já vimos que, mesmo que a derivada se anule num ponto de abcissa a, não implica obrigatoriamente que esse ponto seja um extremo. **Mas, será que, mesmo que a derivada não se anule num ponto de abcissa a, esse ponto poderá ser um extremo? [PA]** **Vamos considerar a função $f(x) = \|x\|$. O que podemos concluir? [PD]** Reparem que não existe derivada no ponto de abcissa nula. No entanto, $f(0)$ é um mínimo da função $f(x)$.
	**E será necessário que a derivada de uma função mude de sinal para garantir acerca da existência de extremos? [PA]** De facto existem situações em que a derivada não muda de sinal num determinado intervalo mas existem extremos nesse intervalo. Que é o caso de algumas funções descontínuas, como o exemplo da função f. Se construirmos um quadro de variação percebemos isso mesmo. No entanto, no 11.º ano não são estudadas as funções descontínuas neste contexto. Este exemplo serve apenas para alertar as várias situações que podem ocorrer. No 11.º ano apenas é preciso conhecer muito bem as funções contínuas e não esquecer os exemplos anteriores, ou seja, a função cúbica e a função módulo.

Terceira parte:

- Realização de uma tarefa de aplicação dos conteúdos estudados.

Tarefa A

1. Num relvado pretende-se construir uma piscina retangular com $98\ m^2$ de área e à volta dela uma zona pedonal não relvada, tendo nos topos $2\ m$ de largura e nos outros lados $1\ m$, como é sugerido no esquema abaixo.



Que dimensões deve ter a piscina para que a área do terreno destinado à piscina e à zona pedonal seja mínima?

Quais são os dados do problema? **[PC]**

$$A_{piscina} = 98m^2$$

Largura da zona pedonal nos topos: $2m$

Largura da zona pedonal nos lados: $1m$

Como se podem escrever os lados da piscina com os dados fornecidos? **[PD]**
E os lados do terreno? **[PC]**

Seja x o comprimento da piscina. Logo a largura da piscina é dada por $\frac{98}{x}$.

Assim, o comprimento do terreno será dado por $x + 4$ e a largura por $\frac{98}{x} + 2$.

O que é pedido no enunciado? **[PC]**

Pretende-se determinar as dimensões da piscina de forma a que a área do terreno seja mínima. Isto é, pretendemos determinar o x.

Como podemos encontrar o que é pedido? **[PD]**

É necessário encontrar a expressão da área do terreno para, de seguida, encontrar o mínimo da expressão através do estudo da sua derivada.

$$\begin{aligned} A_{terreno}(x) &= (x+4)\left(\frac{98}{x}+2\right) \\ &= (x+4)\left(\frac{98}{x}+2\right) \\ &= 98 + 2x + \frac{392}{x} + 8 \\ &= \frac{392}{x} + 2x + 106 \end{aligned}$$

$$A'_{terreno} = -\frac{392}{x^2} + 2$$

$$\begin{aligned} A'_{terreno} = 0 &\Leftrightarrow -392 + 2x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 = 392 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 196 \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ x = 14$, uma vez que x é o comprimento da piscina logo não pode ser negativo

x	0		14	$+\infty$
A'	/	$-$	0	$+$
A	/	↘	m	↗

Pela análise da tabela, podemos concluir que a área do terreno é mínima quando x é 14.

Comprimento da piscina $=$ 14 metros

Largura da piscina $= \frac{98}{14} = 7$ metros

Resposta: A piscina deve ter de dimensões 7 metros de largura e 14 metros de comprimento.

2. Admite que a temperatura da água da piscina é dada, t horas após as 8:00 de um certo dia, em graus Celsius, pela função T definida por:

$$T(t) = -\frac{t^3}{30} + 0{,}45t^2 - 1{,}4t + 18 \;; \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$$

2.1 Qual era a temperatura da água às 8:00 ? E às 18:00 ?

2.2 No período de tempo considerado, estuda, por processos analíticos, o comportamento da temperatura quanto a intervalos de monotonia e extremos.

O que é pedido no enunciado da pergunta 2.1? **[PC]**

Pretende-se determinar a temperatura da água para $t = 0$ e para $t = 10$.

O que é necessário fazer para determinar o pedido? **[PD]**

$$T(0) = -\frac{0}{30} + 0{,}45 \times 0 - 1{,}4 \times 0 + 18 = 18$$

$$T(10) = -\frac{10^3}{30} + 0{,}45 \times 10^2 - 1{,}4 \times 10 + 18$$

$$= -\frac{100}{3} + 45 - 14 + 18 \;\cong 15{,}67$$

Resposta: Às 8:00 a água encontrava-se a 18ºC e às 18:00 a cerca de 15,7ºC.

O que é pedido no enunciado da pergunta 2.2? **[PC]**

Pretende-se encontrar os extremos da função $T(t)$ e indicar os intervalos de monotonia.

O que é necessário fazer para determinar o pedido? **[PD]**

Para isso, precisamos estudar o sinal da função derivada de $T(t)$.

$$T'(t) = -0{,}1t^2 + 0{,}9t - 1{,}4$$

$$T'(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}1t^2 + 0{,}9t - 1{,}4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 7$$

t t	0		2		7		10
$T'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$T(t)$		↘	m	↗	M	↘	

Resposta: A temperatura da água diminui entre as 8:00 e as 10:00 e novamente entre as 15:00 e as 18:00. Por sua vez, a sua temperatura aumenta entre as 10:00 e as 15:00.

A temperatura mínima da água deu-se às 10:00, atingindo cerca dos 16,7ºC. Já a temperatura máxima foi registada às 15:00, com um valor aproximado de 18,8ºC.

Quarta parte:

- Finalização da aula, propondo como trabalho de casa as tarefas propostas na página 161 do manual escolar adotado.

Anexo 13 – Planificação 6: Inequações do 1.º grau a uma incógnita (9.º ano)

Data prevista: 5 de maio de 2014

Objetivos gerais

- Compreender as noções de inequação e de solução de uma inequação.
- Resolver inequações do 1.º grau utilizando as regras de resolução.
- Resolver e formular problemas envolvendo inequações.

Estrutura da aula

- Resolução de uma tarefa exploratória de introdução à temática.
- Explicitação de conceitos e propriedades relativas às Inequações.
- Resolução de tarefas relacionadas com a temática.

Recursos

- Caderno diário e lápis ou caneta
- Manual escolar

Desenvolvimento da aula

Primeira parte:

- Entrada dos alunos e acomodação na sala de aula.
- Escrita do sumário.

  Inequações do 1.º grau a uma incógnita.

Segunda parte:

- Proposta de uma tarefa de exploração para iniciar o tema
- Explicitação dos conceitos envolvidos

<table>
<tr><th colspan="2">Proposta de uma tarefa de exploração para iniciar o tema</th></tr>
<tr>
<td>

1. Vamos considerar um retângulo cujo comprimento excede a largura em quatro unidades.

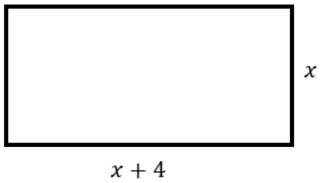
a) Escreve uma expressão simplificada em x que traduza o perímetro do retângulo. **[PC]**

(1) Pretende-se que os alunos integrem a informação fornecida, no caso, que considerando x como a largura, então $x + 4$ representará o comprimento do retângulo, concluindo assim que o perímetro do mesmo é dado pela expressão $4x + 8$.

</td>
<td>

Os alunos devem começar por desenhar um retângulo que traduza a situação, escrevendo o comprimento em função da largura, para de seguida escrever a expressão do perímetro.

Como podemos representar os lados do retângulo? **[PC]**
As duas perguntas seguintes servem para orientar os alunos caso estes não consigam de imediato responder à pergunta acima.
Será que conseguimos escrever o comprimento em função da largura? **[PC]** Se representarmos a largura por x, como podemos representar o comprimento? **[PC]**
De facto, como no enunciado nos diz que o comprimento é superior à largura em três unidades, por isso, se representarmos a largura por x o comprimento será $x + 4$



Como podemos agora escrever o perímetro do retângulo? **[PC]**
Pretende-se que os alunos identifiquem de imediato que

$$P = 2 \times x + 2 \times (x + 4)$$

E agora, simplificando, como é que fica a expressão? **[C-M]**

$$\begin{aligned} P &= 2 \times x + 2 \times (x + 4) \\ &= 2x + 2x + 2 \times 4 \\ &= 4x + 8 \end{aligned}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

b) Qual será o valor da largura do retângulo para que o perímetro seja inferior a 20 unidades de medida? **[PD]**

(2) Pretende-se que os alunos percebam que existem vários valores reais possíveis para o x, no entanto, com restrições, sendo aceite qualquer estratégia de reflexão para a questão.

</td>
<td>

Os alunos podem criar as suas próprias ideias ou formas de responder à pergunta. Presume-se que começarão a encontrar valores para x através de tentativas.
Será único o valor de x que satisfaça o enunciado? **[PC]**
Os alunos devem concluir que existem vários valores para x.
Quais serão os valores de x que satisfazem a desigualdade? **[PC]**
As perguntas seguintes servem para orientar os alunos caso estes não consigam de imediato responder à pergunta acima, uma vez que se pretende que os alunos indiquem um intervalo de números reais.

</td>
</tr>
</table>

	Poderá o x ser negativo? **[PC]** E zero? **[PC]** E poderá ser, por exemplo, 5? **[PC]** *Os alunos devem concluir que x nunca poderá ser inferior ou igual a zero mas que, por outro lado, também não pode assumir valores superiores a três.* *Aqui deve-se escrever a desigualdade em causa ($4x + 8 < 20$) e explicar os conceitos envolvidos.*

Explicitação dos conceitos envolvidos	
Uma **Inequação de 1.º grau a uma incógnita** é uma desigualdade onde figura uma variável (incógnita). Exemplo: $4x + 8 < 20$ Diz-se **solução de uma inequação** qualquer número real que torna a desigualdade verdadeira. Exemplo: Se x for 2,3, a desigualdade acima fica $4 \times 2{,}3 + 8 < 20$ $17{,}2 < 20$ Ou seja, 2,3 é uma solução da inequação $4x + 8 < 20$. Ao conjunto de todas as soluções de uma inequação dá-se o nome de **conjunto-solução** e representa-se por **S**.	De facto, estamos presentes de uma condição à qual se dá o nome de inequação, visto que estamos a falar de uma desigualdade. O valor que o primeiro membro assume terá que ser menor que o valor do segundo termo. *De seguida, deve-se propor aos alunos que escrevam no caderno as definições e exemplos ao lado*. Mas como determinar todas as soluções de uma inequação? **[PA]** (3) Pretende-se que os alunos reflitam sobre a questão colocada, interliguem os conteúdos que conhecem e justifiquem a sua estratégia de resolução.

<table>
<tr><th colspan="2">A resolução de inequações do 1.º grau a uma incógnita</th></tr>
<tr><td>

2. Resolve em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações e apresenta o conjunto-solução na forma de um intervalo de números reais.
   c) $-2 + 4x < -6$
   d) $-5x + 1 \leq 3 - 2x$

</td><td>

Deve ser proposto aos alunos que copiem para o caderno diário a tarefa.

</td></tr>
<tr><td>

a)

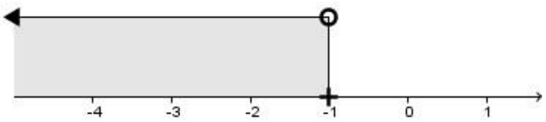
$-2 + 4x < -6$

$\Leftrightarrow 4x < -6 + 2$ $\quad +2$

$\Leftrightarrow 4x < -4$ $\quad \times \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x < \frac{-4}{4}$

$\Leftrightarrow x < -1$



$S =]-\infty; -1[$

</td><td>

Como será que podemos resolver uma inequação de forma a encontrar todas as suas soluções? **[PD]** Será que podemos utilizar princípios de equivalência semelhantes aos que utilizamos para resolver equações? **[PD]**

Se estivéssemos perante uma equação, o que fariam? **[C-M]** Será legítimo fazer essa passagem também nas inequações? **[PC]** Que propriedades conhecem? **[C-M]**

(4) Pretende-se que os alunos recordem a monotonia total da relação de ordem $<$ em relação à adição e a monotonia parcial da relação de ordem $<$ em relação à multiplicação, constatando que, de facto, são utilizados princípios de equivalências idênticos aos utilizados na resolução de equações.

Como podemos começar então a resolver a inequação? **[PC]**

Devemos começar por utilizar a monotonia total da relação de ordem $<$ em relação à adição, somando 2 unidades a ambos os membros.

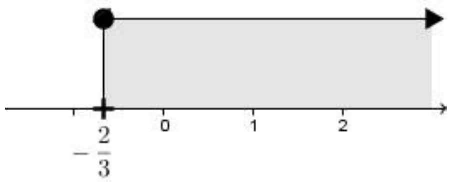
E de seguida, o que podemos fazer? **[PC]**

Podemos utilizar a monotonia parcial da relação de ordem $<$ em relação à multiplicação, multiplicando por $\frac{1}{4}$ ambos os membros.

Qual é então o conjunto-solução da inequação? **[C-M]**

$$S =]-\infty; -1[$$

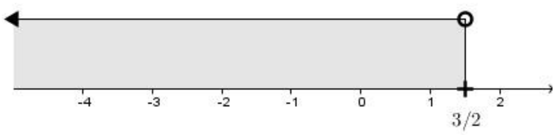
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
b)
$-5x + 1 \leq 3 - 2x$
$\Leftrightarrow -5x + 2x \leq 3 - 1$
$\Leftrightarrow -3x \leq 2 \quad \times\left(-\frac{1}{3}\right)$
$\Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$


$S = [-\frac{2}{3}; +\infty[$
</td>
<td>
Pretende-se que os alunos resolvam a inequação sem ajuda, relembrando que, ao multiplicar ambos os membros por um número negativo, troca o sentido da desigualdade.
</td>
</tr>
</table>

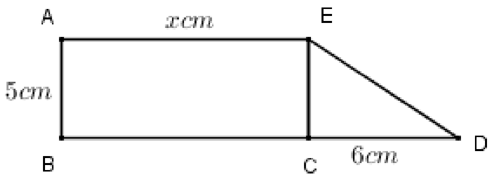
Terceira parte:

- Resolução de tarefas de aplicação.

Resolução de exercícios e problemas envolvendo inequações do 1.º grau a uma incógnita	
3. Dada a inequação $$x - \frac{1}{2} > 2(x-1)$$ c) Representa na reta real o conjunto-solução da inequação. d) Qual é o maior número inteiro que satisfaz a inequação.	*Deve ser proposto aos alunos que copiem para o caderno diário as tarefas seguintes e as resolvam.* *Como a tarefa é idênticas às anteriores, devem ser seguido o mesmo tipo de perguntas, caso os alunos ainda não se tenham familiarizado com a resolução de inequações.*
a) $$x - \frac{1}{2} > 2(x-1)$$ $$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} > 2x - 2$$ $$\Leftrightarrow x - 2x > -2 + \frac{1}{2}$$ $$\Leftrightarrow -x > -\frac{3}{2}$$ $$\Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$  $$S =]-\infty; \frac{3}{2}[$$	
b) É o número 1.	

<table>
<tr>
<td>

4. Tendo em conta a figura seguinte, qual é o menor valor natural de x a partir do qual a área do retângulo é superior à área do triângulo?



$$A_{\square} > A_{\Delta}$$
$$5 \times x > \frac{6 \times 5}{2}$$
$$\Leftrightarrow 5x > 15$$
$$\Leftrightarrow x > 3$$

R.: O menor valor natural de x para o qual a área do retângulo é superior à área do triângulo é 4 cm.

</td>
<td>

Como podemos resolver o problema? **[PD]**
O que é pedido no enunciado? **[PC]** Como podemos representar essa condição? **[PC]**
(5) Pretende-se que os alunos considerem que pretendemos encontrar o menor valor natural de x que satisfaça a desigualdade $A_{\square} > A_{\Delta}$.
Tendo em conta a figura, como podemos traduzir a desigualdade com as informações dadas? **[PC]**
Pretende-se que os alunos traduzam as fórmulas das áreas do retângulo e do triângulo através dos valores dados na figura. No caso:

$$5 \times x > \frac{6 \times 5}{2}$$

(6) Sendo que agora apenas falta determinar o conjunto-solução da inequação, supõe-se que os alunos o consigam terminar sem dificuldade, concluindo que o valor natural procurado é 4.

</td>
</tr>
</table>

- Resolução de exercícios do manual escolar.

  Exercícios 5, 6, 7 e 8 da página 161.

Anexo 14 – Transcrição da aula do dia 5 de maio

[*Início da aula, ditando o sumário: Inequações de 1.º grau a uma incógnita*]

Tarefa 1

[*Escrita no quadro do enunciado, ditando ao mesmo tempo, propondo aos alunos que copiem para os respetivos cadernos diários*]

Professora: Então, vamos considerar um retângulo cujo comprimento excede a largura em quatro unidades. Estão a copiar não estão? **[Rh]**

[*Pretende-se reforçar que é necessário copiar para o caderno diário o que está a ser escrito no quadro*]

Professora: Vamos então colocar na figura que a largura é x. [*No quadro, foi desenhado um retângulo, indicando-se x como o comprimento da largura do mesmo*] Alínea a: quero que pensem numa expressão… então, escreve uma expressão simplificada, claro, em x, que traduza o perímetro do retângulo. **[PC]**

Professora: Pensem lá um bocadinho…

[*Circulação pela sala de aula enquanto a turma copia o enunciado para o caderno diário e reflete acerca da pergunta colocada*]

Professora: Então eu quero que vocês me digam, sendo que a largura é x, como é que eu posso representar a outra medida do retângulo? **[PC]**

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (1)*]

A14: Então, $x + 4$.

Professora: $x + 4$, exatamente! Porque diz aqui que o comprimento do retângulo excede quatro unidades da largura. Então se a largura é x, claro que o comprimento do retângulo vai ser $x + 4$. '*Tá*? **[Rh]** Então agora o perímetro, como é que ficará? **[PC]**

[*Pretende-se ainda concluir o objetivo em (1)*]

A14: P igual a…

A18: $4x$

A13: P igual a x…

A18: P igual a $4x + 8$.

Professora: Antes de ser simplificado… **[R]**

[*Pretende-se que os alunos mais participantes compreendam que é necessário desenvolver a resolução de forma mais minuciosa para que todos entendam as etapas*]

A18: $x + x +$…

Professora: Então é $2x$ mais duas vezes….$x + 4$. Era isto? **[R]**

[*Pretende-se confirmar se a totalidade da turma concluiu a etapa sem dificuldades*]

A13: Sim!

Professora: Foi isto que fizeste? **[R]** [*Dirigindo-se ao aluno A18]*

[Pretende-se perceber se o aluno tinha resolvido a tarefa da mesma forma. O aluno responde que resolveu de forma diferente, embora indiferente para o objetivo primordial da tarefa, no caso, chegar a uma expressão simplificada do perímetro do retângulo]

Professora: Então, claro que isto vai dar, como o vosso colega [A18] estava a dizer, $2x + 2x + 8$ que simplificado dá $4x + 8$. Agora quero que vocês pensem um bocadinho: qual será o valor da largura do retângulo para que o perímetro seja inferior a 20 unidades de medida? **[PD]** [*Escrita no quadro da alínea seguinte da tarefa em causa, ditando o enunciado*]

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (2)*]

Professora: Pensem lá um bocadinho. Ou seja, o que é que eu vou querer afinal? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos reconheçam que a pergunta exige encontrar um valor para a largura, x, do retângulo que torne o seu perímetro inferior a 20 unidades de medida*]

A14: É o valor de x!

Professora: Quero encontrar o valor de x, a largura sim.

[*Circulação pela sala de aula enquanto a turma reflete acerca da questão colocada*]

Professora: Sugestões? **[PD]**

[*Pretende-se ainda concluir o objetivo em (2)*]

A13: É para usar o perímetro que nos deu na alínea anterior!?

Professora: Exatamente, é para usar a expressão do perímetro da alínea anterior.

A13: Se x for $2\ldots$

Professora: Se x for $2\ldots$ vou apagar a alínea a *'tá* bem? **[Rh]** Posso apagar a alínea a? **[R]**

[*Pretende-se que os alunos não se distraiam e copiem atempadamente o que está no quadro para o seu caderno diário*]

A19: Sim!

Professora: Sim… Se x for 2, era isto? **[Rh]** Então fica 4 vezes 2 mais 8 que dá… **[R]**

[*Pretende-se que os alunos se mantenham atentos e a seguir todas as etapas da resolução*]

A17: 16.

A11: Porque é que é 2?

Professora: Porque ela disse. '*Tamos* a palpitar, a dar um palpite. Então é 16 e realmente 16 é inferior a 20.

Professora: Existem mais valores que satisfaçam a condição? **[PC]**

[*Pretende-se ainda concluir o objetivo em (2)*]

A14: Um.

Professora: Um? **[R]** [*Escrita no quadro*] Se for um, $4x2\ +8$ dá 12 é? **[R]** Mais? **[PC]**

[*Pretende-se confirmar o que o aluno aferiu e, de seguida, pretende-se que os alunos indiquem mais números, não necessariamente naturais, que satisfaçam a condição*]

A17: Pode ser dois e meio.

Professora: Dois e meio, vamos ver. Gosto desse valor. Dois vírgula cinco, então $4 \times 2{,}5 + 8$ dá… **[R]**

[*Pretende-se que os alunos se mantenham atentos e a seguir todas as etapas da resolução*]

A13: 18

Professora: 18. Então e será que pode ser cinco? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos neguem, uma vez que, caso a largura do retângulo seja* 5*, o perímetro deste já será superior a* 20]

A13: Não.

Professora: Não pode. E…

A: [*impercetível*]

Professora Diz. **[R]**

[*Pretende-se que o aluno intervenha no desenvolvimento da aula*]

A: [*impercetível*]

Professora: Três, x igual a três. $4 \times 3 + 8$ dá 20. Ah! Mas eu quero que o perímetro seja inferior a 20… por isso não dá. Então e se fosse 2,9999…? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos afirmem, uma vez que, caso a largura do retângulo seja inferior a* 3*, o perímetro deste já será inferior a* 20]

A9: Dá.

A13: Dava.

Professora: Dava. E se fosse 0? Se o x fosse 0. **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos neguem, uma vez que, como nos estamos a referir a dimensões de uma figura geométrica, estas nunca poderão ser nulas*]

A13: Dava.

Professora: Podia ser? **[R]**

[*Pretende-se que os alunos repensem na resposta dada, fomentando a discussão à volta desta possibilidade, concluindo assim o objetivo em (2)*]

A21: Dava!

Professora: Podia ser?! **[R]**

[*Pretende-se, mais uma vez, que os alunos repensem na resposta dada*]

A21: Sim.

Professora: Olhem lá para a figura…

[*Alguns alunos a falarem ao mesmo tempo o que tornou a gravação impercetível*]

Professora: A largura pode ser zero? **[PC]**

[*Pretende-se ainda concluir o objetivo em (2)*]

A17: Não.

Professora: Não pode ser zero! Não é? **[Rh]** Então, estamos ali a considerar um retângulo se a largura for zero não é um retângulo. Quanto muito é uma linha. E… se o x fosse negativo? **[PC]**

[*Pretende-se que os alunos neguem, uma vez que, como nos estamos a referir a dimensões de uma figura geométrica, estas nunca poderão negativas*]

A14: Não porque não há medidas negativas.

Professora: Boa! Então… vamos lá pensar um bocadinho no que é que efetivamente nós temos. Vou apagar aqui *'tá* bem? **[Rh]** Pensem lá se não é isto que nós queremos: nós queremos que a expressão $4x + 8$ seja inferior a 20. [*Escrita no quadro, ficando* $4x + 8 < 20$] É ou não? **[C-M]**

[*Pretende-se que os alunos recordem a utilização das relações de ordem* $<$ *e* $>$]

A17: Sim.

Professora: Ok! Não sei se alguém chegou a essa conclusão no caderno… **[R]**

[*Pretende-se identificar quais os alunos que interligaram os conhecimentos com a tarefa a ser resolvida para verificar o nível de compreensão da turma em geral*]

A13: Sim! Eu!

Professora: Boa, muito bem! Então agora é importante pararmos um bocadinho e pensarmos nas definições que estão aqui envolvidas. A esta desigualdade chama-se inequação! Não é uma equação, não tem o sinal de igual, que é o que vocês conheciam. Mas como tem uma desigualdade, então eu tenho de ter aqui uma relação de ordem, seja o "menor", seja o "menor ou igual", o "maior" ou o "maior ou igual" será sempre uma inequação.

[*Escrita no quadro da definição de inequação no quadro ditando ao mesmo tempo e propondo aos alunos que copiem para os cadernos diários*]

Professora: Como tínhamos visto existem vários valores de x que satisfazem esta condição, certo? **[Rh]** Eu tinha ali alguns exemplos ao lado, o 1, o 2, o 2,5, o 2,9999…

[*Pretende-se chamar a atenção dos alunos de modo a não dispersarem*]

[*Escrita no quadro da definição de solução de uma inequação ditando ao mesmo tempo e propondo aos alunos que copiem para os cadernos diários*]

Professora: Ainda não estamos a resolver uma inequação, *'tá bem*? Estamos a pensar em valores que satisfaçam aquela desigualdade que vimos. Nós sabemos que o perímetro dava $4x + 8$, era isto? **[R]** E queríamos que $4x + 8$ seja menor que 20. Vocês estão a colocar os exemplos aqui, aqueles que eu estou a dizer oralmente? **[R]** De certeza? **[R]** Exemplo… E qual é que é o exemplo? $4x + 8$ menor que 20. E quais é que são os exemplos para este? Vocês tinham lá, eu já apaguei. x igual a 2…

[*Pretende-se que os alunos não se limitem a copiar o que está no quadro mas que tirem apontamentos que lhes permitam compreender as definições. No caso, pretende-se que os alunos coloquem exemplos de inequações e de soluções para uma determinada inequação com base no que foi realizado anteriormente em conjunto*]

A18: Igual a 1.

Professora: x igual a 1, entre outros que possam ter encontrado.

A17: Professora, então esse exemplo é para a primeira…

Professora: Sim, nós estamos ainda a considerar o retângulo, *'ta bem*? **[Rh]**

[*Explicitação de uma dúvida individual do aluno A?? que não se relaciona diretamente com a tarefa em causa*]

[*Escrita no quadro da definição de conjunto-solução de uma inequação ditando ao mesmo tempo e propondo aos alunos que copiem para os cadernos diários*]

Professora: E nós já vamos ver então como é que se pode determinar todas as soluções de uma inequação. Nós aqui encontramos algumas, nem que tivéssemos aqui um ano a dizer várias soluções chegaríamos ao conjunto todo. Então, como é que nós podemos determinar todas as soluções de uma inequação? **[PA]**

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (3)*]

A13: Num intervalo…

Professora: Ok, mas isso é a representação de todas as soluções. O que o A13 está a dizer é que o nosso conjunto-solução vai estar entre um valor a e um valor b. Não é? **[Rh]** Por exemplo, vamos imaginar na reta real, as soluções seriam entre este valor e este valor. Não é? **[Rh]**

A14: Fazer *ao calhas* é grosseiro.

Professora: Fazer *ao calhas*… Exatamente. Fazer *ao calhas* é grosseiro. Então vamos… vou apagar tudo, *'tá bem*? E vamos pensar. Posso apagar aqui deste lado? **[R]**

Tarefa 2

[*Escrita no quadro do enunciado 2.a), ditando ao mesmo tempo, propondo aos alunos que copiem para os respetivos cadernos diários*]

Professora: Então, se isto fosse uma equação o que é que nós fazíamos logo, primeiro? **[C-M]** Eu vou até escrever aqui $-2 + 4x = -6$…

[*Pretende-se que os alunos encarem a primeira inequação como uma equação e verifiquem que, através das propriedades das relações de ordem* < *e* >, *o procedimento de resolução é idêntico*]

A17: Passava primeiro x's para um lado…

A13: *Ya*, x's para um lado…

Professora: Este, não é? **[Rh]** Ficava neste membro, e o -2? **[C-M]**

Professora: Somava-se $+2$ aos dois membros. Então… será que se eu tiver aqui o menor eu posso deixar o $4x$… não, não era isto que eu queria fazer. Então tenho $-2 + x$ será que eu posso somar aqui 2 para nos dar ali 0? **[C-M]**

A13: Aplicamos aquelas propriedades…

Professora: Boa! É mesmo isso que eu queria que tu me dissesses. Então, posso fazer isto ou não? **[C-M]**

A17: Sim.

Professora: Porquê? Eu quero é que vocês me digam o porquê. **[PC]**

[*Pretende-se alcançar o objetivo em (4)*]

Professora: Porque há uma propriedade que vocês conhecem que se chama… **[C-M]**

A17: Relação de ordem.

Professora: Relação de ordem em relação a que operação? **[C-M]**

A13: À adição!

Professora: À adição, muito bem. Então efetivamente, e se calhar é melhor vocês escreverem, eu posso fazer este passo. E sim posso meter que é equivalente, ok? **[R]** Porque vocês conhecem a monotonia da relação de ordem, neste caso menor, em relação à adição. Então, numa equação $-2+4x=-6$, o que vocês decoram, o que é que vocês decoram A9? **[R]** Ah… está ali a subtrair por isso passa para o outro lado a somar, mas não é isso que vocês fazem, isso é o que vocês decoram. O que vocês fazem…O que é que vocês querem? **[R]** É ficar aqui isolado com o $4x$ é ou não? **[Rh]** Eu já expliquei isto numa aula que também fui eu que dei. Então eu posso somar 2 a ambos os membros e a minha equação vai ser equivalente, ela não é a mesma, ela é equivalente, têm as mesmas soluções, lembram-se disto? **[R]**

A11: A professora já explicou isso.

Professora: Então, o que vocês efetivamente fazem não é passar para o outro lado a somar, subtrair ou como é que vocês decoram. O que vocês fazem é, vocês querem que fique aqui só $4x$ e eu vou fazer com que este 2 se anule mas para eu somar a um lado também tenho de somar ao outro, ou se eu multiplico de um lado também tenho de multiplicar ao outro, 'tá? **[Rh]** Serve o mesmo para as inequações.

[Explicação de um dúvida individual que se alargou a toda a turma]

Professora: [*continuação da resolução da tarefa*] Então, resultado… Agora sim é que vamos simplificar, como é que fica? **[C-M]**

A18: $4x-\ 6\ +2$

Professora: que dá… **[R]**

A18: -4

Professora: Boa, -4. E agora? **[C-M]**

A21: x…

Professora: Equivalente… será que posso? **[PC]**

A10: Não.

Professora: Será que posso? **[PC]** O que é que ias fazer [A11]? **[R]**

A11: Não, ia fazer asneira acho eu.

Professora: Então o que é que eu fiz? **[R]** Mais uma vez, voltando às equações, o que é que fariam? **[C-M]**

A4: $x = -4$ a dividir por 4 que dava -1.

Professora: Ou seja, o que é que fizeste a ambos os membros? **[C-M]**

A10: Dividir!

Professora: Dividiste por…

A18:1/4

Professora: Será que podes? **[PC]**

A4: Sim.

Professora: Será que podes aqui multiplicar por um quarto? **[PC]**

A9: Sim, utilizando a monotonia parcial…

Professora: Boa. Boa, isso mesmo. Monotonia da relação…

A17: Parcial!

Professora: Exatamente, tens toda a razão… de ordem menor.

[*A aula é interrompida por alguns momentos pelo facto dos alunos estarem a ter um comportamento desadequado*]

Professora: … em relação à multiplicação. Agora simplificado, como é que fica? **[C-M]**

[*Aluno interrompe para esclarecer o que se encontra escrito no quadro*]

Professora: Então como é que fica simplificada a expressão? **[C-M]**

A18: x

Professora: x

A18: Menor

Professora: Menor

A18: -4 sobre 4

Professora: Que dá -1. Representem lá na reta real.

Professora: Já representaram na reta real? **[R]**

A4: Não.

Professora: Então representem. Sabem-me dizer o conjunto solução já? **[C-M]** Conjunto-solução. O que pede na pergunta é o conjunto solução sabem-mo dizer? **[C-M]**

A13: É um intervalo…

Professora: Dá um intervalo. Qual é que é o intervalo? **[R]**

A: [*impercetível*]

Professora: até…

A18: -1

Professora: Aberto ou fechado? **[C-M]**

A13: Aberto!

Professora: Mas o que eu quero que vocês me façam, para perceberem muito bem onde estamos, é a reta.

[*Representação no quadro da reta real e o respetivo C.S. da tarefa realizada*]

Professora: Resultado. O meu conjunto de solução vai ser, como o [A14] disse, menos infinito até -1.

[O*s alunos são desafiados a resolver outra inequação, no caso a alínea b. Enquanto os mesmos resolvem no lugar a professora vai esclarecendo dúvidas que su*rgem]

Professora: Então, primeiro o que vamos fazer? **[C-M]** Se fosse uma equação, vá lá. Se fosse uma equação o que é que fariam? **[PC]**

A13: x's para um lado .

Professora: Termos com incógnita num membro e os termos sem incógnita para o outro, é isso? **[R]** Então vamos pensar. O $5x$ já cá estava. E o $2x$, podemos passá-lo para este lado? **[PC]**

A11: Sim.

Professora: Porquê? **[PA]** E qual é a propriedade que utilizamos? **[PC]**

A14: Monotonia total em relação à adi…

Professora: Então aqui nós usamos a monotonia da relação de ordem em relação à..

A11: Adição!

Professora: Efetivamente o que nós fizemos foi somar $2x$ da mesma forma como a A11 estava a dizer. Isto aqui agora simplificado dá… Quanto é que dá isto simplificado? **[R]**

A13: $-3x - 1$

Professora: E agora? **[R]** Mais uma vez temos monotonia… vocês já sabem agora, só que o que fizemos foi com -1. Agora, simplificando… Já devia estar resolvido. E agora? **[C-M]**

A21: x menor que -2 sobre 3.

Professora: Porque é que a monotonia em relação à multiplicação era parcial? **[PC]**

A13: Porque o sinal muda!

Professora: Porque o sinal muda. Então, vá, outra sugestão que essa não foi muito boa. Diz lá outra vez!

A21: x

Professora: Sim…

A21: igual a -2, não $-2/3$

Professora: Então, vão lá ver o caderno para trás, o que é que acontecia? **[C-M]**

A: [*impercetível*]

Professora: Quando nós queremos mul… neste caso o que é que nós queremos? **[R]** Vamos lá ver… neste caso o que é que nós queremos fazer? **[R]** Multiplicar por menos um terço. Sim ou não? **[Rh]**

A17: Porque queremos que fique positivo.

Professora: Sim. Exato, era para ficar positivo, então tem que ser menos. Mas vocês viram que quando nós queremos multiplicar por um número negativo, o sentido da desigualdade altera-se.

Professora: Então podemos fazer devagarinho. Quando nós queremos multiplicar por um número negativo para isolar a nossa incógnita efetivamente o que é que nós queremos? **[R]** Isto… [escrevendo *no quadro*] É ou não? **[Rh]** Isto aqui depois não dará x? **[R]** Então quando queremos fazer isto… quando nós queremos fazer isto, a professora disse que automaticamente ao multiplicar por um número negativo…

[I*nterrupção devido a um comportamento desadequado por parte de um aluno*]

Professora: Quando nós queremos, já disse isto três vezes, quando nós queremos multiplicar por um número negativo, o sentido da desigualdade altera-se. Isto é muito importante que vocês…

A11: Mas muda o sinal?

Professora: Ao multiplicar por negativo sim. ´Tá? **[Rh]** Então ao que o [A18] chegou e muito bem, dá x maior ou igual $-2/3$.

[*Esclarecimento de dúvidas, pedindo-se para que os alunos apresentem o conjunto-solução depois de o representarem na reta real*]

Professora: Então como é que ficou na reta? **[R]**

A18: [*impercetível*]

Professora: Diz…

A18: de $-2/3$ para menos infinito.

Professora: Menos infinito? **[R]**

A18: Ah sim, para mais infinito!

Professora: Para mais ou para menos infinito? **[C-M]**

A10: Mais.

Professora: Então, quero que o meu x seja maior… marquei a abcissa $-2/3$, eu quero que os valores de x sejam superiores. [*Representando na reta real*]

A18: É para mais.

Professora: Maior. Fechado ou aberto? **[R]**

A13: Fechado.

Professora: Então qual é que é o conjunto solução? **[C-M]**

A13: Para mais infinito aberto

Professora: Boa.

[*Esclarecimento de uma dúvida*]

Tarefa 3

[*Escrita no quadro do enunciado, ditando ao mesmo tempo. De seguida é dado tempo para que os alunos resolvam a tarefa*]

Professora: O que é que vocês começaram por fazer? **[C-M]** Diz [A11]**.**

A11: Começar a resolver o que está dentro de parenteses.

Professora: Simplificar o que está dentro de parenteses. 'Bora lá! Rápido! E agora? **[C-M]**

A11: E agora temos de resolver… o x para um lado…

Professora: As incógnitas para um lado como faziam nas equações, ok? **[Rh]** Então como fica? Diz! **[R]**

A14: Fica $x - \frac{1}{2}$ [*impercetível*]. Eu multipliquei.

Professora: Multiplicaste o quê? **[R]** Ok, pode ser. A vossa colega pegou, utilizou uma das monotonias que vocês conhecem.

Professora: Vê se foi isto que fizeste. Multiplicavas ambos os membros por 2, não foi? **[R]** Podemos? **[PC]**

[E*sclarecimento de uma dúvida individual*]

Professora: Então como é que fica? **[R]**

A11: Isso fica $2x - 4x$.

Professora: Ok, queres primeiro aqui, só estou a multiplicar por 2.

A14: Ah... ok! E depois [*impercetível*] …

Professora: Eu posso multiplicar por 2 ambos os membros? **[C-M]**

A10: Pode.

Professora: Porquê? **[PA]** O que é que utilizo? **[PC]**

A10: Monotonia parcial…

Professora: Monotonia parcial em relação à multiplicação. É melhor escreverem aí ao lado. E agora como a A11 estava a dizer $2x - 4x$… era isto? **[R]**

A11: Sim!

Professora: E neste membro? **[C-M]**

A11: $1 - 4$

Professora: Ou seja, efetivamente o que ela fez foi subtrair $4x$ em ambos os membros, foi ou não? **[R]**

A11: Sim.

Professora: E adicionaste 1.

[*Chamada de atenção aos alunos uma vez que o seu comportamento estava a ser desadequado*]

Professora: A seguir… simplificar a expressão. Já está feito [A4], tudo até ao fim? **[R]**

A4: Tentei resolver só [*impercetível*].

Professora: Simplifica-me esta expressão, anda, rápido. Vá! **[R]**

A4: $-x$

Professora: Anda! **[R]** Com confiança e rápido.

A4: Maior do que $-3/2$

Professora: ´Tá? **[Rh]** Até aqui toda a gente chegou? **[R]**

Professora: Provavelmente… não houve ninguém que não tenha feito esta passagem aqui, que não tenha feito isto? **[R]**

A13: Eu fiz mais à frente.

A18: Eu fiz.

Professora: Mais à frente… ok.

A21: Eu fiz mal.

[*Esclarecimento de dúvida a uma aluna e de seguida chamada de atenção a um aluno que não estava com comportamento adequado*]

Professora: E agora, o que é que vocês fizeram aqui? **[R]** Então? **[R]**

A11: Aí troca o sinal.

Professora: Aqui troca o sentido da desigualdade, era isso que querias dizer, não era? **[R]**

A11: Era ‘stora.

[*A professora deixa algum tempo para terminar a tarefa e propõe a um aluno que vá resolver no quadro. Enquanto isto esclarece dúvidas individualmente*]

Professora: Respondam agora à alínea b e expliquem-me o vosso raciocínio! **[PA]**

[*Esclarecimento de uma dúvida durante breves segundos*]

Professora: Alínea b, já não a tenho aqui mas vocês têm o enunciado.

A13: Qual é o maior número inteiro…

A11: Então há-de ser 1,4

Professora: Inteiro. Um número inteiro.

A11: Ah! Inteiro! É 1.

Professora: Então este aqui é 3/5, eu vou ter que procurar…

[*Chamada de atenção aos alunos que estavam com comportamento desadequado*]

Professora: Então qual é que é o número inteiro que satisfaz a igualdade? **[PC]**

A21: 1

Professora: Porquê? **[PC]**

A13: Então porque 3/2 é [*impercetível*].

Professora: Percebem porque é que é importante representar na reta real? **[Rh]**

Alunos: Sim!